Analiza Funkcjonalna - zad 69 b) *

Krzysztof Zakrzewski

16 grudnia 2020

Chcemy udowodnić, że $(J_V)^* \circ J_{V^*} = id_{V^*}$. Najpierw przeanalizujmy jak wyglądają poszczególne przekształcenia występujące w tej równości. Mamy $J_V : V \to V^{**}$ i $(J_V(v))(\phi) = \phi(v)$, dla $v \in V$ i $\phi \in V^*$. Analogicznie $J_{V^*} : V^* \to V^{***}$ $(J_{V^*}(\psi))(h) = h(\psi)$, dla $h \in V^{**}$ i $\psi \in V^*$. Mamy także $(J_V)^* : V^{***} \to V^*$, takie że $(J_V)^*(\psi) = \psi \circ J_V$.
Niech $\phi \in V^*$. Chcemy uzasadnić, że $((J_V)^* \circ J_{V^*})(\phi) = \phi$.
Czyli, że $((J_V)^*(J_{V^*}(\phi)))(v) = \phi(v)$.
Z definicji $(J_V)^*$, mamy $((J_V)^*(J_{V^*}(\phi)))(v) = (J_{V^*}(\phi) \circ J_V)(v)$
Rozpisujemy $(J_{V^*}(\phi) \circ J_V)(v) = (J_{V^*}(\phi))(J_V(v))$
Z definicji J_{V^*} mamy $(J_{V^*}(\phi))(J_V(v)) = (J_V(v))(\phi) = \phi(v)$, gdzie ostatnia równość wynika z definicji J_V.