Analiza Funkcjonalna - zad 59*

Krzysztof Zakrzewski

9 grudnia 2020

Załóżmy, że V^* jest ośrodkowa, niech $\{f_n\}$ będzie przeliczalnym podzbiorem gęstym V^*. Niech $g_n = \frac{f_n}{||f_n||}$, wtedy $||g_n|| = 1$ i $\{g_n\}$ jest ośrodkiem sfery o promieniu 1 w przestrzeni V^*. Skoro $||g_n|| = 1$, to dla każdego n istnieje $x_n \in V$, takie że $|x_n| \leqslant 1$ i $g_n(x_n) \geqslant \frac{1}{2}$. Rozpatrzmy $S = Span_{\mathbf{Q}}(x_1, x_2, ..)$, jest to zbiór przeliczalny. Udowodnimy, że jest gęsty w V co zakończy dowód. Załóżmy, że $V \neq \overline{\mathrm{S}}$. Z wniosku drugiego z tw Hahna-Banaha z notatek, wynika, że istnieje $f \in V^*$, taki że $f(\overline{\mathrm{S}}) = 0$ i $||f|| = 1$. Wtedy mamy, że

$$||g_n - f|| \geqslant |g_n(x_n) - f(x_n)| = |g_n(x_n)| \geqslant \frac{1}{2}$$

Co daje sprzeczność, bo zbiór $\{g_n\}$ miał być gęsty w V^*.