Analiza Funkcjonalna - zad 52

Krzysztof Zakrzewski

30 listopada 2020

52*. Niech
$$\mathcal{G}_n = \{x \in X : \forall_{m\in\mathbb{N}} |f_m(x)| > n\}.$$
Łatwo zauważyć, że $\mathcal{G}_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} (f_m^{-1}((-\infty, -n) \cup (n, \infty)))$, zatem zbiory $\mathcal{G}_n$ są otwarte.
Rozpatrzmy dwa przypadki:
I przypadek: $\forall_n G_n$ jest gęsty w X. Z twierdzenia Baire'a zbiór $\mathcal{G} = \bigcap \mathcal{G}_n$ jest gęsty, a więc także niepusty. Weźmy zatem $x \in \mathcal{G}$. Wtedy mamy, że
$\forall_{n\in\mathbb{N}} \exists_{m\in\mathbb{N}} : |f_m(x)| > n$. Co przeczy temu, że $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest punktowo ograniczona.
II przypadek: Pewien G_n jest rozłączny z kulą $B(v_0, r)$, gdzie $v_0 \in V$ i $r > 0$. Wtedy $\exists_{n_0} \forall_{x\in B(v_0,r)} \forall_m |f_m(x)| < n_0$, co oznacza, że rodzina $\{f_n\}$ jest jednostajnie ograniczona (przez n_0) na zbiorze otwartym $B(v_0, r)$.