Analiza Funkcjonalna - 78 d)

Krzysztof Zakrzewski

27 stycznia 2021

78 d).
Załóżmy, że ciąg $\{f_n\} \in C(X)$ zbiega słabo do $f \in C(X)$. Ciąg $\phi(f_n)$ jest w szczególności ograniczony, dla każdego $\phi \in (C(X))^*$. Z twierdzenia z wykładu wynika, że oznacza to, że sam zbiór $\{f_n\} \in C(X)$ jest ograniczony, czyli $sup_n ||f_n||_{sup} < \infty$. Ewaluacja w punkcie x jest ciągłym funkcjonałem na $C(X)$, zatem $lim_n f_n(x) = f(x)$, dla każdego $x \in X$.

Załóżmy, że $sup_n ||f_n||_{sup} < \infty$ i $\forall_x \, lim_n f_n(x) = f(x)$. Niech $\phi \in C(X)^*$, chcemy uzasadnić, że $\phi(f_n) \to \phi(f)$. Z twierdzenia o postaci funkcjonałów ciągłych na $C(X)$, wynika, że istnieje taka σ-addytywna, regularna miara μ o skończonej wariacji na X, taka że $\forall_{f \in C(X)} \phi(f) = \int_X f d\mu$. Miara $\mu = \mu_+ - \mu_-$, dla pewnych miar nieujemnych μ_- oraz μ_+. Ponieważ ciąg f_n, zbiega punktowo do f, oraz jest wspólnie ograniczony, to z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej mamy, że $\int_X f_n d\mu_- \to \int_X f d\mu_-$ oraz $\int_X f_n d\mu_+ \to \int_X f d\mu_+$. Dostajemy $\phi(f_n) = \int_X f_n d\mu = \int_X f_n d\mu_+ - \int_X f_n d\mu_- \to \int_X f d\mu_+ - \int_X f d\mu_- = \int_X f d\mu = \phi(f)$.