Problem 1

Dowieść, że każda przemienna grupa $(G, +)$ jest średniowalna tzn. na $\ell^\infty(G)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla wszystkich $f \in \ell^\infty(G)$ i $g \in G$; gdzie $f_g(x) := f(x+g)$ dla $x \in G$

(1) Cel: każda skończenie generowana grupa przemienna jest średniowalna.

Twierdzenie o klasyfikacji skończenie generowanych grup abelowych (wystarczy uproszczona wersja) mówi, że jeśli G jest skończenie generowaną grupą abelową, to $G = F \oplus \mathbb{Z}^n$ $(n = 0, 1, \dots)$ gdzie F jest skończoną grupą abelową.

$\boxed{\text{(a) } \mathbb{Z} \text{ jest średniowalna.}}$

Dowód jest zupełnie analogiczny jak w zadaniu 9. Niech $W = \ell^\infty(\mathbb{Z})$. $G = \{1\}$ (w sensie: $f \circ 1(x) := f(x+1)$), jednoelementowa rodzina przekształceń zbioru $\mathbb{Z}$ (przesunięcie).

Wystarczy sprawdzić, że $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_1, \dots, f_n \in W$ kres górny funkcji $\sum_{i=1}^{n} (f_i \circ 1 - f_i)$ jest nieujemny. Ale jeśli $\sup_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ 1 - f_i)(x) \leq -\varepsilon < 0$, to dla $F := \sum_{i=1}^{n} f_i$ mamy: $F(m) = \sum_{k=0}^{m-1} (F(k+1) - F(k)) + F(0) = \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ 1 - f_i)(k) + F(0) =$

$$\leq \sum_{k=0}^{m-1} (-\varepsilon) + F(0) = -m\varepsilon + F(0) \xrightarrow{m \to \infty} -\infty.$$

Sprzeczność, bo w takim razie $F \notin \ell^\infty(G)$, nie jest ograniczona. Ale F jest skończoną sumą funkcji należących do $W = \ell^\infty(G)$, zatem powinna tu należeć.

Wniosek: $\sup_{x \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ 1 - f_i) \geq 0$.

Zatem na mocy zadania 8 istnieje φ – nieujemny funkcjonał liniowy na $W = \ell^\infty(G)$ taki, że $\varphi(1_T) = 1$ (zatem $\varphi \neq 0$) $\varphi(f \circ 1) = \varphi(f)$.

Do sprawdzenia: φ jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia o dowolne $z \in \mathbb{Z}$.

- $z = -1$: niech $f \in \ell^\infty(G)$ $\varphi(f_{-1}) = \varphi((f_{-1})_1) = \varphi(f)$ V

  ponieważ $(f_{-1})_1(x) = f_{-1}(x+1) = f(x+1-1) = f(x)$

- $z > 0$: przez indukcję można pokazać, że jeśli $\varphi(f_z) = \varphi(f)$, to wówczas $\varphi(f_{z+1}) = \varphi((f_z)_1) = \varphi(f_z) = \varphi(f)$ V

  Bazą indukcyjną jest $\varphi(f_1) = \varphi(f)$ (f można rozumieć jako f_0)

  $z < 0$: zupełnie analogicznie; mamy $\varphi(f_{-1}) = \varphi(f)$ i pokażemy, że $\varphi(f_z) = \varphi(f)$ to wtedy $\varphi(f_{z-1}) = \varphi((f_z)_{-1}) = \varphi(f_z) = \varphi(f)$

  V

$\boxed{\text{(b) każda grupa skończona jest średniowalna.}}$

Niech G będzie grupą skończoną. Niech $\varphi(f) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f(g)$ dla $f \in \ell^\infty(G)$.
Skończona suma; oczywista jest nieujemność φ.
Niezmienniczość też: każde przekształcenie uzyskiwane przez dodanie $g \in G$ permutuje elementy zbioru G, więc suma się nie zmienia.
$\varphi \neq 0$, bo np. dla $f = 1_G$ $\varphi(f) = 1$. Liniowość wynika wprost z definicji f.

(c) Skończony produkt (iloczyn kartezjański) grup średniowalnych jest średniowalny.

Wystarczy wykazać, że iloczyn kartezjański dwóch grup średniowalnych jest średniowalny. Prawdziwość dla skończenie wielu grup wynika z indukcji.

Niech G_1, G_2 będą średniowalne. Dla $f \in \ell^\infty(G_1 \times G_2)$ i dla $g_1 \in G_1$ definiujemy $f[g_1] : G_2 \to \mathbb{R}$ jako $f[g_1](g_2) = f((g_1, g_2))$. $f[g_1] \in \ell^\infty(G_2)$. Niech φ_2 będzie funkcjonałem liniowym $\ell^\infty(G_2) \to \mathbb{R}$ nieujemnym, niezerowym, niezmienniczym na działanie $G_2 \curvearrowright G_2$ przez przesunięcia. Istnieje taki funkcjonał, bo G_2 średniowalna.
Dla $f \in \ell^\infty(G_1 \times G_2)$ zdefiniujmy teraz $\tilde{f} : G_1 \to \mathbb{R}$ przez $\tilde{f}(g_1) = \varphi_2(f[g_1])$
z nieujemności φ_2 wynika szacowanie: $\inf_{g_2 \in G_2} f[g_1] \le \varphi_2(f[g_1]) \le \sup_{g_2 \in G_2} f[g_1]$

Istotnie, $f[g_1] - \inf_{g_2} f[g_1](g_2) \ge 0$ zatem $\varphi_2(f[g_1]) \ge \inf_{g_2} f[g_1](g_2)$

oraz $\sup_{g_2 \in G_2} f[g_1](g_2) - f[g_1] \ge 0$ zatem $\varphi_2(f[g_1]) \le \sup_{g_2} f[g_1](g_2)$

Dzięki temu $\tilde{f}$ jest ograniczona ($|\tilde{f}(g_1)| \le \sup_{g_2 \in G_2} |f(g_1, g_2)| \le M$)
zatem $\tilde{f} \in \ell^\infty(G_1)$ dla każdego f.
Na $\ell^\infty(G_1)$ mamy $\varphi_1 : \ell^\infty(G_1) \to \mathbb{R}$ nieujemny, niezerowy funkcjonał liniowy, niezmienniczy na przesunięcia G_1 (działanie $G_1 \curvearrowright G_2$).
Zdefiniujmy zatem $\Phi : \ell^\infty(G_1 \times G_2) \to \mathbb{R}$ przez $\Phi(f) := \varphi_1(\tilde{f})$

Sprawdźmy jeszcze raz warunki.

- $\Phi(af + bg) = \varphi_2($ dla $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \ell^\infty(G_1 \times G_2)$
najpierw $\forall g_1 \in G$ $(af + bg)[g_1] = a \cdot f[g_1] + bg[g_1]$
φ_2 liniowe, zatem $\varphi_2((af+bg)[g_1]) = a \cdot \varphi_2(f[g_1]) + b \cdot \varphi_2(g[g_1])$
Stąd przyporządkowanie $f \mapsto \tilde{f}$ też jest liniowe:
$\widetilde{(af+bg)}(g_1) = \varphi_2(af[g_1] + bg[g_1]) = a\tilde{f}(g_1) + b\tilde{g}(g_1)$
φ_1 też liniowe, zatem Φ również

- nieujemność φ_2 implikuje, że dla f nieujemnej $\tilde{f}$ jest nieujemna. Dzięki temu (i nieujemności φ_1) Φ też nieujemne.

- niezerowość $\tilde{f}(g_1) \ge \inf_{g_2 \in G_2} f(g_1, g_2)$. Z ~~niezerowości~~ nieujemności φ_1
dla każdego $h \in \ell^\infty(G_1)$: $\varphi_1(h - \inf_{g_1 \in G_1} h(g_1)) \ge 0$ zatem $\varphi(h) \ge \inf_{g_2 \in G_2} h(g)$
Stąd $\Phi(f) \ge \inf_{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2} f((g_1, g_2))$. Co np. dla funkcji f ściśle dodatniej, np. $f \equiv 1$
daje niezerowość Φ

- niezmienniczość na przesunięcia. Niech $f \in \ell^\infty(G_1 \times G_2)$ oraz $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$
Wówczas dla $(x, y) \in G_1 \times G_2$ $f_{(g_1, g_2)}(x, y) = f(x + g_1, y + g_2)$ z definicji iloczynu kartezjańskiego grup.
$f_{(g_1,g_2)}[x](y) = f_{(g_1,g_2)}(x, y) = f(x + g_1, y + g_2) = (f[x + g_1])_{g_2}(y)$

Ale φ_2 jest G_2-niezmienniczy t.j. $\varphi_2(f[x + g_1]_{g_2}) = \varphi_2(f[x + g_1])$
Stąd $\widetilde{f_{(g_1,g_2)}}(g_1) = \varphi_2(f[x + g_1]) = \tilde{f}_{g_2}(x)$

Ale teraz φ_1 jest G_1-niezmienniczy zatem $\varphi_1(\tilde{f}_{g_2}) = \varphi_1(\tilde{f})$
zatem $\Phi(f_{(g_1,g_2)}) = \Phi(f)$

W połączeniu z twierdzeniem o klasyfikacji skończenie generowanych grup abelowych kończy to dowód, że każda skończenie generowana grupa abelowa jest średniowalna.

(2) każda (niekoniecznie skończenie generowana) grupa abelowa G jest średniowalna.

Raz jeszcze skorzystamy z zadania 8

Należy sprawdzić, czy dla każdych $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n \in \ell^\infty(G)$ i ~~g1...~~ $g_1, \dots, g_n \in G$ kres górny funkcji

$\sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g_i - f_i)$ jest nieujemny.

$F := \sum_{i=1}^{n} (f_i \circ g_i - f_i)$. Niech $H = \langle g_1, \dots, g_n \rangle$. Rozważmy $F|_H$.

$\forall i$ możemy ograniczyć g_i do H i wówczas $g_i|_H : H \to H$ ze względu na definicję działania g_i i na to, że H jest podgrupą.
H, jako podgrupa grupy przemiennej, jest przemienna i jest skończenie generowana $\Rightarrow$ zatem istnieje $\varphi|_H$ z zadania 8, i na mocy równoważności warunków, $\sup_{h \in H} F|_H \geq 0$ zatem $\sup_{g \in G} F \geq \sup_{h \in H} F \geq 0$.

Stąd, ponieważ dowolnie wybrane $f_1, \dots, f_n$, $g_1, \dots, g_n$ to spełniają, istnieje $\varphi : \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ nieujemny funkcjonał liniowy spełniający $\varphi(1_G) = 1$ (więc niezerowy) niezmienniczy ze względu na działanie $G \curvearrowright G$ przez przesuwanie.