PROBLEM 5

Daniel Murawski

i)

Przestrzenie są skończenie wymiarowe, więc dla $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$\dim V_i = \dim \ker T_i + \dim \operatorname{im} T_i = \cancel{\dim \ker T_i + \dim \ker T_{i+1}}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \underbrace{\dim V_n}_{=0} + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i (\dim \ker T_i + \dim \operatorname{im} T_i) =$$

$$= \underbrace{\dim \ker T_0}_{=0} + \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i (\dim \operatorname{im} T_i - \dim \ker T_{i+1}) + (-1)^{n-1} \underbrace{\dim \operatorname{im} T_{n-1}}_{=0} = 0$$

Korzystamy z faktów, że $\ker T_0 \subset V_0 = \{0\}$, $\operatorname{im} T_{n-1} \subset V_n = \{0\}$, $\operatorname{im} T_i = \ker T_{i+1}$.

ii)

Niech

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

będzie dokładnym ciągiem przekształceń liniowych, $\dim X, \dim Z < \infty$.

$$Y \cong \operatorname{im} f \oplus Y/_{\operatorname{im} f} = \operatorname{im} f \oplus Y/_{\ker g}$$

$$\dim \operatorname{im} f \leq \dim X < \infty$$

$$\dim Y/_{\ker g} = \dim \operatorname{im} g \leq \dim Z < \infty$$

Stąd $\dim Y < \infty$, z czego natychmiast wynika teza podpunktu.

iii)

$$\{0\} \xrightarrow{\iota} \ker S \xrightarrow{i} \ker TS \xrightarrow{S_1} \ker T \xrightarrow{\pi_1} Y/_{\operatorname{im} S} \xrightarrow{\tilde{T}} Z/_{\operatorname{im} TS} \xrightarrow{J} Z/_{\operatorname{im} T} \to \{0\}$$

- $\ker S \subset \ker TS$, i jest włożeniem, $\operatorname{im} i = \cancel{\ker TS}\ \ker S$
- $S_1 = S|_{\ker TS}$, $\ker S_1 = \ker S \cap \ker TS = \ker S$, $\operatorname{im} S_1 = \operatorname{im} S \cap \ker T$ gdyż $\ker TS$ to zbiór wektorów $x \in X$ t.że $T(Sx) = 0$.
- π_1 jest obcięciem rzutowania kanonicznego $Y \xrightarrow{\pi} Y/_{\operatorname{im} S}$ do $\ker T \subset Y$.

$\ker \pi_1 = \cancel{\operatorname{im} S \cap \ker}\ \ker \pi \cap \ker T = \operatorname{im} S \cap \ker T$ $\quad \operatorname{im} \pi_1 = \pi(\ker T)$

~~$\operatorname{im} \pi_1 \cong \ker T / \operatorname{im} S \cap \ker T$ (Nie musi zachodzić $\operatorname{im} S \subset \ker T$, ale relacja $y_1 \sim y_2 \iff y_1 - y_2 \in \operatorname{im} S$ jest dalej~~ dobrze zdefiniowana).

Zeskanowane w CamScanner

- $\tilde{T} : Y/_{imS} \to Z/_{imTS}$ określmy następująco:

~~$\tilde{T}[y]=[$~~ $\tilde{T}(y+imS) = Ty + imTS$

Sprawdźmy, że przekształcenie jest dobrze określone:

zał. $y_1 + imS = y_2 + imS$, czyli $y_1 - y_2 \in imS$

$Ty_1 - Ty_2 = T(\underbrace{y_1 - y_2}_{\in imS}) \in imTS$

$\ker \tilde{T} = \pi(\ker T)$, bo jeśli $y + imS \in \pi(\ker T)$, to $y + imS = y' + imS$ dla $y' \in \ker T$, $\tilde{T}(y+imS) = \tilde{T}(y'+imS) = imTS$, czyli $\pi(\ker T) \subset \ker \tilde{T}$

Z drugiej strony, jeśli $\tilde{T}(y+imS) = imTS$ to $Ty \in imTS$, czyli $\exists x \in X$ t.ż. $Ty = TSx$, $T(y - Sx) = 0$, czyli $y - Sx \in \ker T$, więc $y + imS \in \pi(\ker T)$, $\ker \tilde{T} \subset \pi(\ker T)$.

$im\tilde{T} = imT/_{imTS}$

- $imTS \subset imT$

Określamy J na warstwach $J(z + imTS) = z + imT$, dzięki zawieraniu obrazów jest to dobrze określone przekształcenie.

$\ker J = imT/_{imTS}$, $im J = Z/_{imT}$, J jest epi co dowodzi też dokładności ostatniego przekształcenia (Można skorzystać z tw o izomorfizmie: $(Z/_{imTS})/(imT/_{imTS}) \overset{izo}{\cong} Z/_{imT}$)

iv) $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$

Oznaczamy $V_1 = \ker S$, $V_2 = \ker TS$, $V_3 = \ker T$, $W_1 = V/_{imS}$, $W_2 = W/_{imTS}$, $W_3 = W/_{imT}$.

Chcemy dowieść, że jeśli dla dwóch różnych indeksów V_i, W_i są skończonego wymiaru, to dla trzeciego też. Na podstawie ii) podpunktu wystarczy wskazać taki ciąg dokładny jak w tamtym podpunkcie, skonstruowaliśmy taki ciąg w podpunkcie iii)

Zeskanowane w CamScanner