Zadanie 78d

$\Rightarrow$ Skoro f_n słabo zbiega do f, to w szczególności zachodzi zbieżność dla funkcjonałów $\varphi_x(g) = g(x)$ dla $x \in X, g \in C(X)$, co wymusza $\lim_n f_n(x) = f(x)$. Rozważmy teraz ciąg funkcjonałów $J_{C(X)}(f_n)$ ($J_{C(X)}$ oznacza kanoniczne włożenie w $C(X)^{**}$), wobec założenia słabej zbieżności f_n do f zbieżny punktowo do $J_{C(X)}(f)$. Skoro jest to ciąg ograniczony punktowo, to z twierdzenia Banacha-Steinhausa (oczywiście $C(X)^*$ jest przestrzenią Banacha) jest on ograniczony normowo, co wobec izometryczności $J_{C(X)}$ daje $\sup_n ||f_n|| < \infty$.

$\Leftarrow$ Dowód tej implikacji rozbijemy na kilka kroków:

1. Dla ustalonego funkcjonału $\varphi \in C(X)^*$ chcemy udowodnić, że $\varphi(f_n) \to \varphi(f)$. Z twierdzenia o postaci funkcjonałów na $C(X)$ wiemy, że $\varphi = \varphi_\mu$, gdzie μ jest pewną regularną, σ-addytywną $\mathbb{F}$-miarą na zbiorach borelowskich o skończonej wariacji całkowitej. Ponieważ taką $\mathbb{F}$-miarę można przedstawić jako skończoną kombinację nieujemnych skończonych miar regularnych, możemy założyć, że μ jest nieujemna.

2. Warunek $\forall_{x \in X} \lim_n f_n(x) = f(x)$ daje nam, że oczekiwana zbieżność zachodzi dla miar skupionych w skończenie wielu punktach. Idea dowodu jest taka, że będziemy w pewnym sensie (z dowodu wyniknie w jakim, nie będzie to zwykłe przybliżanie w normie operatorowej) przybliżać miarę μ miarami skupionymi na zbiorach skończonych, tak by otrzymać żądaną granicę.

3. μ w oczywisty sposób rozkłada się na sumę dwóch miar, z których jedna jest zerowa na każdym zbiorze jednopunktowym, a druga jest skupiona na zbiorze tych punktów, w których μ jest dodatnia. Przybliżanie tej drugiej miary jest trywialne, więc przypuśćmy, że $\forall_{x \in X} \mu(\{x\}) = 0$.

4. Ustalmy $\epsilon > 0$. Zdefiniujemy μ_ϵ w następujący sposób: Dla każdego punktu $x \in X$ niech U_x będzie otwartym otoczeniem x takim, że $\mu(U_x) < \epsilon$ oraz $\forall_{y \in U_x} |f(x) - f(y)| < \epsilon$ (istnienie U_x wynika z regularności oraz tego, że $\mu(x) = 0$). Ze zwartości X istnieje skończenie wiele punktów $x_1, ..., x_k$ takich, że U_{x_i}

pokrywają X. Wybieramy teraz zbiory $A_1, ..., A_k$ takie, że $\forall_i x_i \in A_i \subset U_{x_i}$, $\bigcup_i A_i = X$ oraz $\forall_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$. Istnienie takich zbiorów A_i jest jasne, możemy na przykład konstruować je indukcyjnie, w każdym kroku wrzucając do zbioru A_i punkt x_i oraz niewykorzystane punkty należące do U_{x_i} i nienależące do pozostałych jeszcze nierozważonych zbiorów U_{x_j}. Definiujemy μ_ϵ przez $\mu_\epsilon(\{x_i\}) = \mu(A_i)$ oraz $\mu_\epsilon(X \backslash \{x_1, ..., x_k\}) = 0$.

5. Zdefiniujmy zbiory $G_n^\epsilon = \{x \in X : \sup_{m \geqslant n} |f_m(x) - f(x)| \geqslant \epsilon\}$. Jest to ciąg zstępujący, oczywiście $\bigcap_n G_n^\epsilon = \emptyset$, z σ-addytywności miary wynika, że $\mu(G_n^\epsilon) \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Zdefiniujmy też n_ϵ takie, że dla $n \geqslant n_\epsilon$ zachodzi $\mu(G_{n_\epsilon}^\epsilon) < \epsilon$ oraz $\forall_i |f_n(x_i) - f(x_i)| < \epsilon$.

6. Chcemy dla $n > n_\epsilon$ oszacować wartość $|\varphi_\mu(f_n) - \varphi_\mu(f)|$. W oczywisty sposób jest to ograniczone przez $|\varphi_\mu(f_n) - \varphi_{\mu_\epsilon}(f_n)| + |\varphi_{\mu_\epsilon}(f_n) - \varphi_{\mu_\epsilon}(f)| + |\varphi_{\mu_\epsilon}(f) - \varphi_\mu(f)|$. Drugi składnik tej sumy jest w oczywisty sposób ograniczony przez $\epsilon\mu(X)$. Mamy $|\varphi_{\mu_\epsilon}(f) - \varphi_\mu(f)| = |\sum_{i=1}^k (\mu(A_i) f(x_i) - \varphi_\mu(f \mathbf{1}_{A_i}))| \leqslant \sum_{i=1}^k \epsilon\mu(A_i) = \epsilon\mu(X)$ (nierówność wynika z tego, że zażądaliśmy, by na A_i wartości f były odległe od $f(x_i)$ o nie więcej niż ϵ), a także $|\varphi_\mu(f_n) - \varphi_{\mu_\epsilon}(f_n)| = |\sum_{i=1}^k (\mu(A_i) f_n(x_i) - \varphi_\mu(f_n \mathbf{1}_{A_i \backslash G_n^\epsilon})) + \varphi_\mu(f_n \mathbf{1}_{G_n^\epsilon})| \leqslant |\sum_{i=1}^k (2\epsilon\mu(A_i \backslash G_n^\epsilon) + f(x_i)\mu(A_i \cap G_n^\epsilon)) + \sup_n ||f_n|| \epsilon| \leqslant 2\epsilon(\mu(X) + \sup_n ||f_n||)$. Tutaj nierówności wynika z tego, że poza G_n^ϵ funkcja f_n jest ϵ-bliska funkcji f i z $\mu(G_n^\epsilon) < \epsilon$ (zwróćmy uwagę, że dopiero tutaj wykorzystaliśmy wspólne ograniczenie norm f_n). To nam daje ograniczenie $|\varphi_\mu(f_n) - \varphi_\mu(f)| < \epsilon(4\mu(X) + 2\sup_n ||f_n||)$. Zbiegając z ϵ do 0, dostajemy $\varphi_\mu(f_n) \to \varphi_\mu(f)$.