Zadanie 69b

Dążymy do pokazania, że dla dowolnego funkcjonału $\varphi \in V^*$ zachodzi równość $(J_V)^*(J_{V^*}(\varphi)) = \varphi$, czyli po ewaluacji na dowolnym wektorze $v \in V$ zachodzi $(J_V)^*(J_{V^*}(\varphi))(v) = \varphi(v)$. Rozpracujmy to krok po kroku.

Ustalenie, czym jest $J_{V^*}(\varphi)$, jest proste - z definicji kanonicznego włożenia mamy, że jest to element V^{***}, który funkcjonałowi $\alpha \in V^{**}$ przypisuje liczbę $\alpha(\varphi)$. Dla uproszczenia oznaczeń w dalszej części przyjmijmy $f := J_{V^*}(\varphi)$.

Teraz ustalmy, czym jest $(J_V)^*(f)$. To oczywiście musi być funkcjonał na V, zatem trzeba ustalić, jaka będzie ewaluacja tego napisu na wektorze v. Z definicji operatora sprzężonego mamy, że $(J_V)^*(f)(v) = f(J_V(v))$. Z definicji kanonicznego włożenia $J_V(v)$ jest funkcjonałem na V^*, który funkcjonałowi ψ, przypisuje liczbę $\psi(v)$. Ale przypomnijmy sobie, że f elementowi V^{**} przypisuje jego wartość dla φ, czyli $f(J_V(v)) = J_V(v)(\varphi) = \varphi(v)$, a to jest dokładnie to, co chcieliśmy pokazać.