Problem 4

Pomysł - motywacja: Żeby znaleźć kandydata na szukany iloczyn skalarny, na razie przypuśćmy optymistycznie, że nasza norma jest dana przez jakiś iloczyn skalarny $\langle \_, \_ \rangle$ i zastanówmy się, jakie on spełnia własności zależne tylko od tej normy. Nietrudno zauważyć tożsamości $2\mathbf{Re}\langle v, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle = \langle v+w, v+w\rangle - \langle v, v\rangle - \langle w, w\rangle$ oraz $\mathbf{Im}\langle v, w\rangle = -\mathbf{Re}\langle iv, w\rangle$.

Zatem strategia rozwiązania będzie następująca: porzućmy nadmierny optymizm i załóżmy tylko to, co jest w treści zadania. Niech $(V, ||.||)$ będzie naszą przestrzenią. Zdefiniujmy operator $\langle \_, \_ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ w następujący sposób: $\mathbf{Re}\langle v, w\rangle := \frac{1}{2}(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$ i $\mathbf{Im}\langle v, w\rangle := -\mathbf{Re}\langle iv, w\rangle$. Pokażemy, że ten operator jest iloczynem skalarnym i że wyznacza naszą normę. W tym celu musimy pokazać, że:

1. $\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$. Wystarczy sprawdzić to dla części rzeczywistych. Zatem chcemy pokazać, że

   $$||v_1+v_2+w||^2 - ||v_1+v_2||^2 - ||w||^2 = ||v_1+w||^2 + ||v_2+w||^2 - ||v_1||^2 - ||v_2||^2 - 2||w||^2$$

   $$||v_1+v_2+w||^2 + ||w||^2 + ||v_1||^2 + ||v_2||^2 = ||v_1+w||^2 + ||v_2+w||^2 + ||v_1+v_2||^2$$

   Ostatnia równość jest jednak prawdziwa, gdyż z tożsamości równoległoboku mamy $||v_1+v_2+w||^2 + ||w||^2 = \frac{1}{2}(||v_1+v_2+2w||^2 + ||v_1+v_2||^2)$, $||v_1||^2 + ||v_2||^2 = \frac{1}{2}(||v_1+v_2||^2 + ||v_1-v_2||^2)$ i $||v_1+w||^2 + ||v_2+w||^2 = \frac{1}{2}(||v_1+v_2+2w||^2 + ||v_1-v_2||^2)$.

2. $\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$ dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$. Pokażemy to dość standardową metodą poprawiania zbioru skalarów, na którym to zachodzi.

   - Z poprzedniego punktu natychmiast wynika teza dla $a \in \mathbb{N}$. Oczywiście też $\langle 0, w\rangle = 0$, zatem rozszerza się to na $a \in \mathbb{Z}$. Dla $a = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\})$ mamy $n\langle av, w\rangle = \langle v, w\rangle$, co w połączeniu z dotychczasowymi wnioskami daje nam tezę dla $a \in \mathbb{Q}$.
   - Dla $a \in \mathbb{R}$ nadal wystarczy nam rozważać tylko część rzeczywistą. Przy ustalonych wektorach v, w zdefiniujmy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f(a) = ||av + w||^2 - a^2||v||^2 - ||w||^2 - a(||v+w||^2 - ||v||^2 - ||w||^2)$. Wiemy już, że f zeruje się w punktach wymiernych, ponadto f jest w oczywisty sposób ciągła, zatem $f \equiv 0$, co dowodzi tego przypadku naszej tezy.

- Żeby pokazać naszą tezę dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$, wystarczy nam ją pokazać już tylko dla $a = i$. Wtedy mamy $\mathbf{Re}\langle iv, w\rangle = -\mathbf{Im}\langle v, w\rangle = \mathbf{Re}i\langle v, w\rangle$ oraz $\mathbf{Im}\langle iv, w\rangle = -\mathbf{Re}\langle -v, w\rangle = \mathbf{Im}i\langle v, w\rangle$.

3. $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$. Równość części rzeczywistych wynika natychmiast z symetrii wzoru, jakim ją określono. Dla części urojonych mamy $\mathbf{Im}\langle w, v\rangle = -\mathbf{Re}\langle iw, v\rangle = -\mathbf{Re}\langle v, iw\rangle = -\mathbf{Re}\langle -iv, w\rangle = -\mathbf{Im}\langle v, w\rangle$. W trzeciej równości pomnożyliśmy oba wektory przez $-i$, skorzystaliśmy tu istotnie z tego, że mnożenie obu wektorów przez liczbę o module 1 nie zmienia części rzeczywistej badanego operatora, co wprost wynika ze wzoru, jakim ją określono.

4. $\langle v, v\rangle = ||v||^2$. Mamy $\mathbf{Re}\langle v, v\rangle = \frac{1}{2}(||2v||^2 - 2||v||^2) = ||v||^2$ i $\mathbf{Im}\langle v, v\rangle = -\frac{1}{2}(||(1+i)v||^2 - ||v||^2 - ||iv||^2) = 0$.