Zadanie 52

Dla $m \in \mathbb{N}$ zdefiniujmy $U_m := \{x : \sup_n |f_n(x)| > m\}$ i $G = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m$. Wiemy, że:

- $U_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x : |f_n(x)| > m\}$, zatem U_m jest zbiorem otwartym dla każdego m.
- $G = \{x : \sup_n |f_n(x)| = \infty\}$ jest zbiorem pustym z założenia punktowej ograniczoności, więc w szczególności nie jest gęsty w X.
- X jest przestrzenią zupełną.

Zatem z twierdzenia Baire'a wynika, że dla pewnego m zbiór U_m nie jest gęsty w X, więc istnieje taki niepusty zbiór otwarty V, że $U_m \cap V = \emptyset$. Z definicji U_m wprost wynika, że V jest szukanym zbiorem.