Zadania 16d, 22

16d. Aby wykazać, że przestrzeń nie jest ośrodkowa, wystarczy wskazać w niej nieprzeliczalną rodzinę parami rozłącznych kul otwartych. Dla $A \subset \mathbb{N}$ niech 1_A będzie ciągiem równym 1 na indeksach należących do A i 0 w przeciwnym przypadku oraz B_A będzie kulą otwartą o środku w 1_A i promieniu $\frac{1}{3}$. Tych kul jest oczywiście nieprzeliczalnie wiele, są rozłączne, ponieważ jeśli $A_1 \neq A_2$, to ich funkcje charakterystyczne różnią się w pewnym punkcie o 1, więc taka też jest ich odległość w naszej metryce.

22. Przypuśćmy, że teza jest fałszywa, czyli istnieje liniowy operator $J : \mathbb{R}^3 \to W$ taki, że $J|_W = I_W$ oraz $||J|| = 1$. Oznaczmy $v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,0,1), v_3 = (0,1,1), w_i = J(v_i)$ dla $i = 1,2,3$. Jest jasne, że (v_1, v_2, v_3) jest bazą $\mathbb{R}^3$, (v_1, v_2) jest bazą W, $w_1 = v_1, w_2 = v_2, w_3 = (y+z, y, z)$ dla pewnych $y, z \in \mathbb{R}$. Prosty rachunek pokazuje, że dla dowolnych $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ mamy $||v|| = max(|a+b|, |a+c|, |b+c|)$ i $||J(v)|| = max(|a+b+c(y+z)|, |a+yc|, |b+zc|)$. Wskażemy takie a, b, c zależne od y, z, że $||J(v)|| > ||v||$, co da żądaną sprzeczność.

- Jeśli $y + z = 0$, to albo $y = z = 0$ i dla $a = -2, b = \frac{1}{2}, c = 1$ mamy $||v|| = \frac{3}{2} < 2 = ||J(v)||$, albo można założyć, że $y < 0$, wtedy dla $a = -2, b = 0, c = 1$ mamy $||J(v)|| \geqslant 2 - y > 2 = ||v||$.
- Jeśli $y + z > 0$, to dla $a = b = \frac{3}{y+z}, c = \frac{1}{y+z}$ mamy $||J(v)|| \geqslant a + b + 1 > a + b = ||v||$.
- Jeśli $y + z > 0$, to dla $a = b = \frac{3}{y+z}, c = -\frac{1}{y+z}$ mamy $||J(v)|| \geqslant |a + b - 1| = -a - b + 1 > -a - b = ||v||$.