Zadanie 28*
Mieszko Baszczak

Zauważmy, że jeśli wskażemy funkcję $f : K \to \mathbb{R}$ ściśle wypukłą na zbiorze K, to punkt gdzie przyjmuje ona maksimum będzie punktem ekstremalnym. Załóżmy przeciwnie, że f przyjmuje maksimum na K w pewnym punkcie x (przyjmuje w pewnym punkcie bo K zwarty) i że x nie jest ekstremalny. Wtedy istnieją $a, b \in K$ takie, że $x \in [a, b]$ i $a \neq x \neq b$. Ponieważ f jest ściśle wypukła to mamy spełnioną nierówność:

$$f(x) = f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b).$$

Bez straty ogólności niech $f(a) \leqslant f(b)$. Zatem:

$$f(x) < tf(a) + (1-t)f(b) \leqslant tf(b) + (1-t)f(b) = f(b).$$

Mamy sprzeczność z warunkiem maksymalnośći funkcji f w punkcie x. Zatem taki x będzie ekstremalny. Wystarczy zatem wskazać funkcję f. Ponieważ K jest zwarty, to zawiera on przeliczalny zbiór gęsty. Nazwijmy go $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Zdefiniujmy funkcję f następująco:

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \|x - x_i\|.$$

Ta funkcja jest dobrze określona (szereg jest zbieżny), ponieważ K jest ograniczony (jako zbiór zwarty w przestrzeni unormowanej), czyli $\forall_i$ możemy wspólnie ograniczyć $\|x - x_i\|$ przez pewną stałą M. Udowodnimy, że ta funkcja jest ściśle wypukła. Weźmy dowolne dwa różne punkty $a, b \in K$ i $t \in (0, 1)$. Niech i takie, że $\|ta + (1-t)b - x_i\| \leqslant \epsilon$ (dobieramy takie z gęstości $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$). Znów bez straty ogólności niech $t \leqslant \frac{1}{2}$. Wtedy:

$$t\|a - x_i\| + (1-t)\|b - x_i\| \geqslant t\|a - x_i\| + t\|b - x_i\| = t(\|b - x_i\| + \|a - x_i\|) \geqslant$$
$$\geqslant t\|a - x_i - (b - x_i)\| = t\|a - b\|.$$

Zatem dobierając $\epsilon < t\|a - b\|$ (i do tego odpowiednie x_i) dostajemy $\|ta + (1-t)b - x_i\| < t\|a - x_i\| + (1-t)\|b - x_i\|$. Dla dowolnego j z wypukłości normy dostajemy $\|ta + (1-t)b - x_j\| \leqslant t\|a - x_j\| + (1-t)\|b - x_j\|$. Zatem dla i jak wyżej:

$$f(ta + (1-t)b) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^j} \|ta + (1-t)b - x_j\| =$$
$$= \frac{1}{2^i} \|ta + (1-t)b - x_i\| + \sum_{j \in \mathbb{N} \setminus i} \frac{1}{2^j} \|ta + (1-t)b - x_j\| <$$

$$< \frac{1}{2^i}(t\|a-x_i\| + (1-t)\|b-x_i\|) + \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus i} \frac{1}{2^j}\|ta+(1-t)b-x_j\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^i}(t\|a-x_i\| + (1-t)\|b-x_i\|) + \sum_{j\in\mathbb{N}\setminus i} \frac{1}{2^j}(t\|a-x_j\| + (1-t)\|b-x_j\|)\| =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j}(t\|a-x_j\| + (1-t)\|b-x_j\|)\| = tf(a) + (1-t)f(b)$$

co pokazuje że f jest ściśle wypukła na K. To kończy zadanie.