Analiza Funkcjonalna - zad 28

Krzysztof Zakrzewski

19 listopada 2020

28*.
Niech

$$\mathcal{F} = \{\phi \neq A = \overline{A} \subseteq K | \forall_{0<t<1} \forall_{x,y \in K} (tx + (1-t)y \in A \implies x, y \in A)\}$$

Wystarczy, że uzasadnimy, że do rodziny $\mathcal{F}$ należy jakiś jednoelementowy zbiór. Zauważmy, że $K \in \mathcal{F}$, zatem $\mathcal{F} \neq \phi$. Spawdźmy, że do $\mathcal{F}$ należy pewien element minimalny ze względyn na zwieranie, używając lematu Kuratowskiego-Zorna. Niech $A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq A_3$.. będzie zstępującym ciągiem elementów $\mathcal{F}$. Wtedy zbiór $A' = \cap A_i$ jest zbiorem domkniętym (jako przecięcie zbiorów domkniętych). Jest zwarty jako domknięty podzbiór zbioru zwartego. Jest także niepusty z tw. Cantora. Załóżmy zatem, że mamy $t \in (0, 1)$, $x, y \in K$, takie że $tx + (1-t)y \in A'$. Mamy wtedy, że $\forall_i \ tx + (1-t)y \in A_i$, a ponieważ $A_i \in \mathcal{F}$ to $\forall_i \ x, y \in A_i$, czyli $x, y \in A'$. Możemy wywnioskować, że $A' \in \mathcal{F}$. Z lematu K-Z wynika, że w $\mathcal{F}$ istnieje element minimalny F_0, jeżeli $|F_0| = 1$ to koniec. Załóżmy, że $|F_0| \geqslant 2$. Weźmy $a, b \in F_0, a \neq b$. Z twierdzenia o oddzielaniu dla zbiorów $\{a\}$, $\{b\}$ istnieje funkcjonał $\varphi \in V^*$, taki że $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Rozpatrzmy zbiór $B = F_0 \cap \varphi^{-1}(sup\{\varphi \restriction_{F_0}\})$. Funkcja φ jest ciągła, a zbiór F_0 zwarty, zatem funkcja $\varphi \restriction_{F_0}$ przyjjmuje gdzieś na nim swój kres górny, zatem zbiór B jest niepusty. Zbiór B jest domknięty jako przecięcie dwóch zbiorów domkniętych, zatem jest też zwarty (jako domknięty podzbiór zbioru zwartego). Ponadto $B \neq F_0$, ponieważ $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Wystarczy zatem pokazać, że $B \in \mathcal{F}$ (dostaniemy sprzeczność z minimalnością F_0). Weźmy $x, y \in K$ oraz $t \in (0, 1)$, takie że $tx+(1-t)y \in B$. Wiemy, że $F_0 \in \mathcal{F}$, zatem $x, y \in F_0$. Mamy $t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) = \varphi(tx + (1-t)y) = sup \ \varphi \restriction_{F_0}$, gdzie $x, y \in F_0$, zatem $\varphi(x) = \varphi(y) = sup \ \varphi \restriction_{F_0}$. Dostajemy, że $x, y \in B$, zatem $B \in \mathcal{F}$, co kończy dowód.