Zadanie 28

Zbiór A jest (z definicji) „*dobry*" w swoim nadzbiorze B, jeśli spełnia:
„a leży na prostej x, y (x, y różne od a) dla a z A, x, y z B, implikuje x, y należą do A."

W dowodzie odwołam się do poniższych spostrzeżeń:

1. Punkty, w których funkcjonał liniowy przyjmuje maksimum na A tworzą zbiór *dobry* w A, a dla ciągłych funkcjonałów dodatkowo domknięty.
2. Jeśli zbiór A jest *dobry* w B, a B *dobry* w C, to A jest *dobry* w C.

Zauważmy, że niepuste zbiory *dobre* w K domknięte spełniają warunek lematu Zorna: każdy zstępujący łańcuch zbiorów domkniętych w K (a więc i zwartych) ma niepuste przecięcie (też domknięte), a przecięcie zbiorów *dobrych* w K jest zbiorem *dobrym* w K.
Istnieje więc minimalny ze względu na inkluzję zbiór domknięty *dobry* w K := D. Jeśli D nie jest jednopunktowy, to istnieje funkcjonał liniowy rozdzielający jakieś dwa punkty a, b z D, który z tw. Hanha-Banacha można przedłużyć do funkcjonału ciągłego := f (wystarczy określić jego wartość na wektorze (a-b), jakąś niezerową).
Wtedy f ograniczony do D przyjmuje swoje maksimum na D (bo D jest zwarty) na zbiorze := E.
Skoro funkcjonał nie jest stały na D, to zbiór E jest istotnie mniejszy niż D.
E jest domknięty (jako przecięcie D domkniętego z przeciwobrazem punktu przy f ciągłym) i *dobry* w K (bo E jest *dobry* w D z 1., a skoro D jest *dobry* w K, to z 2. E jest *dobry* w K), co przeczy minimalności D.
Istnieje więc zbiór *dobry* jednopunktowy, a z definicji zbioru *dobrego* trywialnie wynika, że jest on ekstremalny.