Egzamin pisemny z AF I* 24 II 2021

Z przedstawionych mi rozwiązań poniższych zadań, do oceny egzaminu liczonych będzie sześć, przy czym tylko jedno z pary 6.1+6.2, tylko jedno z pary 7.1+7.2 i tylko 4 z pozostałych.(Gdy otrzymam więcej rozwiązań, najniżej ocenione wejdą jako uzupełnienie punktacji za zadania domowe.) Za każde zadanie można dostać do 17 punktów.

Każdą oddaną kartkę proszę podpisać i opatrzyć numerem zadania (tylko jednym).

Uwaga: pytania na egzaminie ustnym mogą dotyczyć zadań nierozwiązywanych lub usterek w rozwiązaniach.

1. Niech (v_n) będzie bazą ortonormalną przestrzeni Hilberta H i dla $x \in H$ niech $Tx := (\langle x, v_n \rangle)_{n=1}^{\infty}$.

a) Dowieść, że wzór ten określa ciągły operator liniowy $T : H \to \ell_p$, dla $1 \leq p \leq \infty$.

b) Obliczyć normę tego operatora gdy $p = 1$ i gdy $p = \infty$.

2. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ istnieje taki niezerowy funkcjonał $\varphi \in (L_p([0, 1]))^*$, że $\varphi(f) = 0$ dla każdej funkcji wielomianowej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

3. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech $T_n \subset [0, 1]$ będzie zbiorem skończonym i niech $c_n : T_n \to \mathbb{R}$. Dowieść równoważności warunków:

a) równość $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \sum_{t\in T_n} c_n(t)f(t)$ zachodzi dla każdej funkcji ciągłej $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$;

b) $\sup_n \sum_{t\in T_n} |c_n(t)| < \infty$ i równość w a) zachodzi dla każdej funkcji wielomianowej.

4. Ustalmy ciąg (a_n) liczb zespolonych i dla każdego ciągu (x_n) takich liczb przyjmijmy $Lx = (a_1x_1, a_2x_2, ...)$. Udowodnić równoważność warunków:

a) $Lx \in \ell_2$ dla wszystkich $x \in \ell_3$;

b) $\sum |a_n|^6 < \infty$;

c) wzór $\ell_3 \ni x \mapsto Lx$ poprawnie określa zwarty operator $L : \ell_3 \to \ell_2$.

5. Niech H oznacza przestrzeń Hilberta $L_2([-2, 2])$ i niech

$$W = \{f \in H : \int_{-1}^{1} f(t)\mathrm{d}t = 0 = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\}$$

a) Dowieść, że W jest domkniętą podprzestrzenią liniową przestrzeni H.

b) Wyznaczyć $\inf\{\int_{-2}^{2} |t - f(t)|^2\mathrm{d}t : f \in W\}$.

6.1. Niech $1 \leq q < r < \infty$ i niech funkcja $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ma tę własność, że $uf \in L_r$ dla każdej funkcji $f \in L_q$. (Piszemy $L_t := L_t(\mu)$, gdzie μ to miara Lebesgue'a na $[0, 1]$.) Dowieść, że:

a) operator $M_u : L_q \to L_r$, zdefiniowany wzorem $M_uf = uf$, jest ciągły,

b) $u \in L_s$, gdzie $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}$.

6.2. Niech V i W będą przestrzeniami Banacha, a przekształcenia liniowe $S : V \to W$

i $T : W^* \to V^*$ niech będą takie, że $\psi(Sv) = (T\psi)(v)$ dla wszystkich $v \in V$ i $\psi \in W^*$. Dowieść ciągłości S i T.

7.1. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ i operator T będzie normalny, z $\|T\| \le 1$. Dowieść, że istnieje taki operator normalny S, że $\|S\| \le 1$ i operatory $T \pm \mathbf{i}S$ są unitarne.

7.2. Dowieść, że gdy operator T jest samosprzężony, to $T - \mathbf{i}I$ jest odwracalny, a $(T + \mathbf{i}I)(T - \mathbf{i}I)^{-1}$ jest unitarny.

8. Udowodnić, że gdy $p \in (1, \infty)$, to ciąg $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ funkcji Rademachera, zdefiniowanych wzorem $r_k(x) = \mathrm{Sgn}(\sin(2^k \pi x))$ dla $x \in [0, 1]$ i $k \in \mathbb{N}$, jest przy $k \to \infty$ słabo zbieżny do zera w $L_p([0, 1])$.