Egzamin pisemny z AF I* 2 II 2021

Z przedstawionych mi rozwiązań poniższych zadań, do oceny egzaminu liczonych będzie sześć, przy czym tylko jedno z pary 6.1+6.2, tylko jedno z pary 7.1+7.2 i tylko 4 z pozostałych.(Gdy otrzymam więcej rozwiązań, najniżej ocenione wejdą jako uzupełnienie punktacji za zadania domowe.) Za każde zadanie można dostać do 17 punktów.

Każdą oddaną kartkę proszę podpisać i opatrzyć numerem zadania (tylko jednym).

Uwaga: pytania na egzaminie ustnym mogą dotyczyć zadań nierozwiązywanych lub usterek w rozwiązaniach.

1. Niech X będzie wypukłym, otwartym podzbiorem rzeczywistej przestrzeni unormowanej, zaś ciągłe funkcje $f, g : X \to \mathbb{R}$ będą takie, że g i $-f$ są wypukłe i $f \leq g$. Udowodnić istnienie takiej ciągłej funkcji afinicznej s, że $f \leq s \leq g$.

2. a) Udowodnić, że dla normy ilorazowej w ℓ_∞ / c_0 ma miejsce tożsamość:

$$\|[x]\| = \lim_j \sup |x_j| \quad \text{dla} \ \ x \in \ell_\infty \ .$$

b) Niech $X = \{f \in C([-1,1] : f_{|[0,1]} = 0\}$. Dowieść, że przestrzeń $C([-1,1])/X$ jest liniowo-topologicznie izomorficzna z $C([0,1])$.

3. a) Dowieść, że domknięta kula jednostkowa $\overline{B}_X$ nie ma punktów ekstremalnych gdy $X = c_0$, zaś ma je gdy $X = c$.

b) Dowieść, że przestrzenie c_0 i c nie są liniowo izometryczne.

c) Czy są one liniowo-topologicznie izomorficzne?

4. a) Niech $1 \leq p < q < \infty$. Dowieść, że $\ell_p \subsetneq \ell_q$.

b) Przy tym samym założeniu dowieść, że kula $\{x \in \ell_p : \|x\|_p \leq 1\}$ stanowi w ℓ_q zbiór domknięty, o pustym wnętrzu.

c) Dowieść, że gdy $q > 1$, to $\bigcup_{p \in [1,q)} \ell_p \neq \ell_q$.

5. Niech X będzie przestrzenią Banacha, Y i Z będą przestrzeniami unormowanymi, a funkcja $b : X \times Y \to Z$ będzie dwuliniowa. Dowieść równoważności warunków:

(i) funkcja $b : X \times Y \to Z$ jest ciągła;

(ii) dla każdych $x_0 \in X$ i $y_0 \in Y$ funkcje $b(\cdot, y_0)$ i $b(x_0, \cdot)$ są ciągłe;

(iii) istnieje taka stała $c > 0$, że $|b(x,y)| \leq c\|x\|\|y\|$ dla wszystkich $x \in X$ i $y \in Y$.

Wskazówka: twierdzenie Banacha–Steinhausa.

6.1. X jest przestrzenią Banacha i przekształcenie $T : X \to L_\infty([0,1])$ jest liniowe. Dla funkcji $f \in L_\infty([0,1])$ oznaczmy przez $\|f\|_\infty$ jej normę w przestrzeni $L_\infty([0,1])$, a przez $\|f\|_2$ jej normę w $L_2([0,1])$. Udowodnić, że jeśli $\sup\{\|Tx\|_2 : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$, to $\sup\{\|Tx\|_\infty : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$.

6.2. Niech $(x_n)_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni unormowanej X, takim, że $(\varphi(x_n)) \in \ell_2$ dla każdego funkcjonału $\varphi \in X^*$. Udowodnić, że formuła $T\varphi = (\varphi(x_n))_{n=1}^\infty$ wyznacza ograniczony operator $T : X^* \to \ell_2$.

7.1. Niech T będzie samosprzężonym operatorem liniowym na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$, takim, że $||T|| \leq 1$. Udowodnić, że ciąg operatorów $S_n = \frac{1}{n}(I + T + \cdots + T^{n-1})$ jest punktowo zbieżny[1], a jego granica jest operatorem rzutu ortogonalnego na podprzestrzeń $\{h \in H : Th = h\}$.

7.2. a) Na przestrzeni $L_2(\mu)$, gdzie μ jest miarą σ–skończoną, rozpatrujemy operator mnożenia M_u przez funkcję $u \in L_\infty^{\mathbb{R}}(\mu)$, dany wzorem $M_u f = uf$ dla $f \in L_2(\mu)$. Udowodnić, że:

$$\inf\{\langle M_u f, f\rangle : \|f\| = 1\} = \sup\{c \in \mathbb{R} : u \geq c \text{ prawie wszędzie}\}.$$

b) Niech T będzie samosprzężonym operatorem na przestrzeni Hilberta $H \neq \{0\}$. Udowodnić, że liczba $\inf\{\langle Tv, v\rangle : \|v\| = 1\}$ leży w jego spektrum σ_T.

8. Dla $f \in L_1(\mathbb{R}_+)$, gdzie $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, niech Tf oznacza ciąg $Tf = (\int_{n-1}^{n} f(x)dx)_{n=1}^{\infty}$.

a) Dowieść, że wzór ten poprawnie określa operator $T : L_1(\mathbb{R}_+) \to \ell_3$ i obliczyć $\|T\|$.

b) Przy kanonicznym utożsamieniu ℓ_3^* z $\ell_{3/2}$, zaś $L_1(\mathbb{R}_+)^*$ z $L_\infty(\mathbb{R}_+)$, opisać wzorem operator T^* i wyznaczyć $\|T^*\|$.

c) Czy któryś z operatorów T i T^* jest zwarty?

[1] Rozumiem przez to, że dla każdego $x \in H$ ciąg $(S_n(x))_n$ jest zbieżny w normie przestrzeni H.