Analiza Funkcjonalna 1* jesień 2020. (Zajęcia H. Toruńczyka.)
Zadania domowe i omawiane na ćwiczeniach.

Uwaga: a) W każdym zadaniu lub problemie, wolno wykorzystywać wcześniejsze jego części lub wcześniejsze zadania, nawet, gdy te nie zostały jeszcze rozwiązane.

b) Proszę się nie zniechęcać, gdy napotkają Państwo na trudniejsze zadania/problemy. Niektóre wymagają więcej czasu i do nierozwiązanych zadań będziemy powracać. Niekiedy zapisuję zadania „na zapas", by było z czego wybierać – ale wszystkie powinny dać się rozwiązać w oparciu o materiał już omówiony na wykładzie.

c) Będę się starał wstawiać + przy omówionych już zadaniach lub ich częściach. Jeśli rozwiązanie w jakiejś formie znajdzie się w notatkach do wykładu, oznaczę to przez +.

d) Wedle zasady „najpierw obowiązek, a potem przyjemność" proszę upewnić się, czy nie sprawiają kłopotów zadania, które były wykorzystywane na wykładzie. (Jeśli spawiają, proszę to zgłaszać – bez nich dowody z wykładu są niepełne.)

1. + Udowodnić „**aksjomat Pascha**": gdy $b' \in [a, v]$ i $a' \in [b, v]$, to $[a, a'] \cap [b, b'] \neq \emptyset$. (Jest to aksjomat syntetycznej geometrii płaszczyzny.)

2. + a) $\mathrm{conv}(A) = \{t_1 a_1 + \cdots + t_n a_n : n \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_n \in A, t_1, \ldots, t_n \geq 0$ i $\sum_i t_i = 1\}$.

b) Gdy niepuste zbiory $A, B \subset V$ są wypukłe, to $\mathrm{conv}(A \cup B) = \bigcup_{(a,b) \in A \times B} [a, b]$.

3. +a) Funkcja $p : V \to \mathbb{R}$, spełniająca warunek $p(tv) = t \cdot p(v)$ dla $v \in V$ i $t \geq 0$, jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ dla $v, w \in V$.

b) Gdy obie funkcje $p : V \to \mathbb{R}$ i $-p$ są wypukłe i $p(0_V) = 0$, to p jest funkcją $\mathbb{R}$–liniową.

4. + a) Gdy funkcja $p : X \to [-\infty, \infty)$ jest wypukła, to $A := \{(x, t) : x \in X$ i $t \geq p(x)\}$ jest zbiorem wypukłym w $V \times \mathbb{R}$.

b) Odwrotnie, gdy $A \subset V \times \mathbb{R}$ jest zbiorem wypukłym, którego rzut na V oznaczmy przez X, to wzór $p(x) := \inf\{c : (x, c) \in A\}$, $x \in X$, wyznacza funkcję wypukłą p. Przy $q(x) := \sup\{c : (x, c) \in A\}$, funkcja $-q : X \to [-\infty, \infty)$ też jest więc wypukła.

5. + Dowieść następującego twierdzenia Mazura i Orlicza: gdy $p : V \to \mathbb{R}$ jest dodatnio jednorodną funkcją wypukłą, a S podzbiorem przestrzeni $V \times \mathbb{R}$, to dla istnienia $\mathbb{R}$–liniowej funkcji z V w $\mathbb{R}$, której wykres leży nad S, a pod wykresem funkcji p potrzeba i wystarcza, by dla każdych skończonych układów $\{(x_\gamma, c_\gamma)\}_{\gamma \in \Gamma} \subset S$ i $\{t_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma} \subset (0, \infty)$ spełniona była nierówność $\sum_\gamma t_\gamma c_\gamma \leq p(\sum t_\gamma x_\gamma)$. (Wskazówka: uwaga 2 na str. 3 notatek.)

6. a) + Dowieść, że funkcja wypukła $p : V \to \mathbb{R}$ jest obwiednią górną pewnej rodziny Φ funkcjonałów afinicznych (tzn. zachodzi $p(x) = \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(x)$ dla każdego $x \in V$).

b) Gdy funkcja p jest wypukła i dodatnio jednorodna (tzn. taka, że $p(tv) = tp(v)$

dla $v \in V$ i $t \geq 0$), to funkcjonały można obrać liniowe.

7. + (Przypomnienie GALu.) a) Dowieść, że gdy ψ i φ są funkcjonałami liniowymi na przestrzeni wektorowej V i $\ker(\psi) \supset \ker(\varphi)$, to $\psi = \lambda \cdot \varphi$ dla pewnego skalara λ. Ogólniej, gdy $\psi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ są funkcjonałami liniowymi i $\ker(\psi) \supset \bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i)$, to ψ jest kombinacją liniową pozostałych funkcjonałów.

b) Dowieść, że gdy funkcjonały liniowe $\varphi_1, ..., \varphi_n : V \to \mathbb{F}$ są liniowo niezależne, to istnieją wektory $v_1, ..., v_n \in V$ takie, że $\varphi_i(v_j) = \delta_i^j$ dla $i, j = 1, ..., n$.

Niżej, dla zadanego zbioru T przyjmujemy $\ell_\infty(T) := \{f : T \to \mathbb{R} | \ \sup_t |f(t)| < \infty\}$.

8. Niech rodzina G przekształceń zbioru T i podprzestrzeń liniowa W przestrzeni $\ell_\infty(T)$ będą takie, że $1_T \in W$ i $f \circ g \in W$ dla wszystkich $f \in W$ i $g \in G$. (1_T to funkcja stała, równa 1.) Dowieść równoważności warunków:

a) Istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi : W \to \mathbb{R}$ taki, że $\varphi(1_T) = 1$ i $\varphi(f \circ g) = \varphi(f)$ dla wszystkich $f \in W$ i $g \in G$. („Nieujemny" oznacza, że $\varphi(f) \geq 0$ dla nieujemnych funkcji $f \in W$.)

b) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $f_1, \ldots, f_n \in W, g_1, \ldots, g_n \in G$, kres górny funkcji $\sum_{i=1}^n (f_i \circ g_i - f_i)$ jest nieujemny.

9. + Dowieść, że na przestrzeni $\ell_\infty(\mathbb{N})$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że gdy pisać x_n zamiast $x(n)$ dla funkcji $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, zaś $\underline{\lim}$ i $\overline{\lim}$ zamiast $\lim_n \inf$ i $\lim_n \sup$, to

$$\underline{\lim}\, x \leq \varphi(x) \leq \overline{\lim}\, x \ \text{ i } \ \varphi(x) = \varphi((x_{n+1})_{n=1}^\infty) \text{ dla } x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(\mathbb{N})$$

10. + Niech V_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej V. Dowieść, że formuła $p(v) = \operatorname{dist}(v, V_0)$ definiuje funkcję $p : V \to \mathbb{R}$ taką, że $p(v + w) \leq p(v) + p(w)$ i $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ dla $v, w \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$.

11. + Dla podzbiorów A, B przestrzeni unormowanej V udowodnić, że:

a) zbiór $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ jest otwarty, gdy A lub B jest otwarty,

b) $A + B$ jest domknięty, gdy jeden ze zbiorów A, B jest zwarty, a drugi domknięty.

c) $A + B$ jest wypukły, gdy A i B są wypukłe.

Problem 1. + Dowieść, że każda przemienna grupa $(G, +)$ jest **średniowalna** (ang. „amenable"), tzn. na $\ell_\infty(G)$ istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla wszystkich $f \in \ell_\infty(G)$ i $g \in G$, gdzie $f_g(x) := f(x + g)$ dla $x \in G$.

Problem 2. Dowieść następującego twierdzenia Banacha: na przestrzeni $\ell_\infty([0, \infty))$ istnieje funkcjonał liniowy φ taki, że $\underline{\lim}_{t \to \infty} f(t) \leq \varphi(f) \leq \overline{\lim}_{t \to \infty} f(t)$ oraz $\varphi(f) = \varphi(f_s)$ dla $f \in \ell_\infty([0, \infty))$ i $s \in (0, \infty)$. (Oznaczenie f_s patrz wyżej).

Problem 3. Udowodnić kolejne twierdzenia Banacha:

a) Na przestrzeni $V = \ell_\infty(T)$, gdzie T to okrąg $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, istnieje nieujemny funkcjonał liniowy $\varphi \neq 0$ taki, że $\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(e^{it})\, dt$ dla funkcji mierzalnych

$f \in V$, oraz $\varphi(f) = \varphi(f_g)$ dla $g \in T$ i $f \in V$. (Oznaczenia jak w problemie 1.)

b) Wywnioskować, że miarę Lebesgue'a na prostej $\mathbb{R}$ można rozszerzyć do nieujemnej miary addytywnej, określonej na wszystkich podzbiorach prostej $\mathbb{R}$ i niezmienniczej względem dowolnej izometrii tej prostej. (Miara taka przyjmuje m.in. wartość ∞; nie może ona być przeliczalnie addytywna. Banach udowodnił też, że można w b) zastąpić prostą $\mathbb{R}$ przez płaszczyznę $\mathbb{R}^2$, lecz – wraz z Tarskim – nie przez przestrzeń $\mathbb{R}^3$.)

Zadania 1–4 były wykorzystywane na pierwszym wykładzie, a 10 i 11 będą na wykładzie 2.

****

12. + Niech zbiór $A \subset V$ będzie pochłaniający i wypukły. Dowieść, że jego funkcjonał Minkowskiego $p = p_A$ jest dodatnio jednorodną, nieujemną funkcją wypukłą. Jeśli ponadto zbiór A jest **zaokrąglony**, tzn. taki że $\lambda A = A$ dla $\lambda \in \mathbb{F}$ o module 1, to zachodzi $p(\lambda v) = |\lambda| p(v)$ dla $v \in V$ i $\lambda \in \mathbb{F}$. (Gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, to „zaokrągloność" oznacza symetrię względem 0_V.)

13. a) + (Przypomnienie GALu.) Dla danej rzeczywistej przestrzeni liniowej wskazać przestrzeń zespoloną, zawierającą ją jako podprzestrzeń rzeczywistą.

b) To samo dla unormowanych przestrzeni liniowych. (Należy zdefiniować normę na otrzymanej przestrzeni zespolonej.)

14. + a) Jeśli funkcjonał liniowy φ nie przyjmuje na kuli $\|v\| < r$ pewnej wartości $\lambda \in \mathbb{F}$, to $\|\varphi\| \le |\lambda|/r$.

b) Dla $\varphi \in V^*$ i $v \in V$ zachodzi $|\varphi(v)| = \|\varphi\| \operatorname{dist}(v, \ker(\varphi))$.

15. + Niech $\ell_1 := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum |x_n| < \infty\}$; przestrzeń tę rozpatrujemy z normą $\|(x_n)\| := \sum |x_n|$. Przyjmijmy:

$X := \{x = (x_n) \in \ell_1 : x_{2n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}, \quad Y := \{y \in \ell_1 : y_{2n} = y_{2n-1}/2^n \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$

a) Dowieść, że X i Y są domkniętymi podprzestrzeniami liniowymi, $X \cap Y = \{0\}$ i suma $X + Y$ jest gęsta w ℓ_1.

b) Wskazać $z \in \ell_1 \setminus (X \oplus Y)$ i dowieść, że $X \cap (Y + z) = \emptyset$, lecz nie istnieje taki niezerowy ciągły funkcjonał liniowy φ, że $\varphi(a) \le \varphi(b)$ dla $a \in X, b \in Y + z$.

16. + (Powtórzenie Topologii I). Przestrzeń metryczną nazywamy **ośrodkową**, jeśli zawiera pewien zbiór przeliczalny, który jest w niej gęsty. Udowodnić, że:

a) Podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metrycznej jest ośrodkowa.

b) Przestrzeń ℓ_1 z powyższego zadania jest ośrodkowa.

c) Przestrzeń $(C([0,1]), \| \ \|)$ wszystkich funkcji ciągłych $[0,1] \to \mathbb{R}$, z normą $\|f\| = \sup_t |f(t)|$, jest ośrodkowa.

d)* Przestrzeń $(\ell_\infty, \| \ \|_\infty)$ wszystkich ciągów ograniczonych, z normą $\|(x_n)\|_\infty := \sup_n |x_n|$, nie jest ośrodkowa.

17. + Niech funkcja $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ będzie ciągła, rosnąca i taka, że $f(0) = 0$. Przez $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to [0, \infty)$ oznaczmy funkcję odwrotną do f. Dla $a \geq 0$ i $b \in \mathrm{im}(f)$ dać rysunkowy dowód nierówności $ab \leq \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt$ i zauważyć, że przy $f(t) = t^{p-1}$ ($p > 1$) daje ona nierówność Younga $ab \leq (1/p)a^p + (1/q)b^q$, gdzie $(1/p) + (1/q) = 1$.

18. + Naszkicować kulę jednostkową w następujcych przestrzeniach: $\ell_1^n, \ell_2^n, \ell_\infty^n$ dla $n = 2, 3$, ℓ_p^2 dla $p > 0$. (Przez ℓ_p^n oznaczam przestrzeń $(\ell_p(\{1, 2, ..., n\}) = (\mathbb{R}^n, \| \; \|_p)$.)

19. + Przyjmując nier. Höldera za znaną udowodnić dla $r, s, t \geq 1$ i μ–mierzalnych funkcji f, g, h, że:

a) jeśli $\frac{1}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, to $\|fg\|_t \leq \|f\|_r \cdot \|g\|_s$;

b) jeśli $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t} = 1$, to $\|fgh\|_1 \leq \|f\|_r \cdot \|g\|_s \cdot \|h\|_t$;

c) jeśli miara μ jest ograniczona przez C i $t < r$, to $\| \; \|_t \leq C^{1/t - 1/r} \| \; \|_r$.

20. + a) Dla $1 \leq p < q \leq \infty$ zbadać, czy zachodzi zawieranie zbiorów $L_p \subset L_q$ lub $L_q \subset L_p$. (L_p oznacza $L_p(\lambda)$, gdzie λ to miara Lebesgue'a na $[0, 1]$.)

b) Zbadać, czy włożenie odpowiadające stwierdzonej inkluzji jest przekształceniem ciągłym i czy jego obraz jest gęsty wgl. domknięty.

c) To samo dla ℓ_p i ℓ_q w miejsce L_p i L_q.

21. + Zależnie od liczby $p \geq 2$ znaleźć najlepsze takie stałe $C, c > 0$, że dla wszystkich $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zachodzi $c\|(x, y)\|_2 \leq \|(x, y)\|_p \leq C\|(x, y)\|_2$.

22. * + Rozpatrzmy podprzestrzeń W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \| \; \|_\infty)$, zadaną równaniem $x - y - z = 0$. Dowieść, że identycznościowego operatora $I_W : W \to W$ nie można przełużyć do operatora liniowego z $\mathbb{R}^3$ w W, mającego normę 1. (Na W rozpatrujemy normę obciętą. Wskazówka: dla takiego przedłużenia J zachodziłoby $J(B) \subset B \cap W$, gdzie B to kula jednostkowa w $(\mathbb{R}^3, \| \; \|_\infty)$.

****

23. + Wykorzystując włożenie na niedomkniętą podprzestrzeń dowieść, że następujące przestrzenie są niezupełne:

a) przestrzeń funkcji wielomianowych na [0,1], z normą sup;

b) przestrzeń funkcji klasy C^{2020} na [0,1], z normą sup;

c) przestrzeń funkcji kawałkami liniowych na [0,1], z normą sup;

d) przestrzeń ℓ_2 z normą przestrzeni ℓ_∞;

e) Przestrzeń wszystkich ciągów $(x_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ dla których $\sup_n n^2|x_n| < \infty$, z normą $\|(x_n)\| = \sum_n |x_n|$.

24. Niech C oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych z $[0, 1]$ w $\mathbb{R}$. Udowodnić, że funkcjonał $C \ni f \mapsto f(1) \in \mathbb{R}$ jest:

a) ciągły, gdy C wyposażone jest w „zwykłą” normę $\|f\|_{\sup} = \sup_t |f(t)|$,

b) nieciągły, gdy C wyposażyć w normę $\|f\|_2 := (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$.

25. + Niech $x, y \in \mathbb{C}$. Dowieść, że:

a) Jeśli $p \in [2, \infty)$, to $\|(x, y)\|_p \leq \|(x + y, x - y)\|_p / 2^{1/p}$. (Wskazówka: skorzystać z zadania 21 i tego, że dla $p = 2$ ma miejsce równość.)

b)* Jeśli $p \in (1, 2]$ i $q := p/(p-1)$, to $\|(x, y)\|_q \leq \|(x + y, x - y)\|_p / 2^{1/p}$, lub inaczej, $(|x|^q + |y|^q)^{p-1} \leq \frac{1}{2}(|x + y|^p + |x - y|^p)$.

26. + Dla przestrzeni unormowanej $(V, \| \ \|)$ nieskończonego wymiaru dowieść, że:

a) Istnieje nieciągły funkcjonał liniowy $\varphi : V \to \mathbb{F}$. (Wskazówka: zdefiniować φ na wektorach bazy algebraicznej.)

b) Jądro $\ker \varphi$ tego funkcjonału nie jest domknięte, a norma $||| \ ||| := \| \ \| + |\varphi|$ nie jest zupełna.

c) Istnieje nieciągły operator liniowy $L : V \to V \times \mathbb{F}$, którego jądrem jest $\{0_V\}$.

Definicja. Punkt x jest **ekstremalny** w podzbiorze K przestrzeni liniowej nad $\mathbb{F}$, gdy $x \in K$ i nie istnieją $a, b \in K$ takie, że $x \in [a, b]$ i $a \neq x \neq b$.

27. + Znaleźć punkty ekstremalne kuli $\|x\| \leq 1$, gdzie norma $\| \ \|$ jest zadana wzorem $\|x\| = \max(|x_1|, |x_2|, |x_1 + x_2|)$ dla $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

28. * + Niech K będzie wypukłym zbiorem zwartym w przestrzeni unormowanej V nad $\mathbb{R}$. Udowodnić, że pewien punkt x jest **ekstremalny** w K, tzn. taki, że $x \in K$ i gdy $x \in [a, b]$, gdzie $a, b \in K$, to $x \in \{a, b\}$.

29. + a) Niech $T : X \to Y$ będzie przekształceniem liniowym między przestrzeniami liniowymi, niech $C \neq \emptyset$ będzie zbiorem wypukłym w X i niech punkt y_0 będzie ekstremalny w zbiorze $T(C)$. Dowieść, że każdy ektremalny punkt zbioru $T^{-1}(y_0) \cap C$ jest ekstremalny w C.

b) Niech C będzie zwartym zbiorem wypukłym w $V := \mathbb{R}^n$. Udowodnić, że w C istnieje punkt ekstremalny. (Wskazówka: a) i indukcja względem $n = \dim V$.) c) Przy oznaczeniach z b) dowieść, że gdy $\varphi \in V^*$, to funkcja $\varphi_{|C}$ przyjmuje swe maksimum w pewnym ekstremalnym punkcie zbioru C.

30. + a) Niech C będzie zwartym i wypukłym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś φ będzie k–linową funkcją rzeczywistą na $\mathbb{R}^n$. (Zgodnie z umową z GAL-u oznacza to, że dziedziną φ jest k-krotna potęga kartezjańska przestrzeni $\mathbb{R}^n$.) Dowieść, że wartość $\sup \varphi(C \times C \times \cdots \times C)$ jest przyjmowana w pewnym punkcie $(c_1, \ldots, c_k)$, gdzie każdy z punktów $c_1, \ldots, c_k$ jest ekstremalny w C.

b) Dowieść, że wyznacznik 2×2 macierzy rzeczywistej o wierszach $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$ nie jest większy od liczby $\|a\| \cdot \|b\|$, gdzie $\| \ \|$ to norma z zadania 27.

****

31. + W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \| \ \|_p)$ (tzn. $\|(x, y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$ dla $x, y \in \mathbb{R}$)

rozpatrzmy podprzestrzeń $Z = \{(x, y) : y = 0\}$ i funkcjonał $\varphi : Z \to \mathbb{R}$ zadany wzorem $\varphi(x, y) = x$ dla $(x, y) \in Z$. Dowieść, że:

a) Gdy $p \in (1, \infty]$, to funkcjonał φ ma jedyne przedłużenie Hahna–Banacha (tzn. takie przedłużenie liniowe $\widetilde{\varphi}$, że $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$), i jest ono zadane wzorem $\widetilde{\varphi}(x, y) = x$.

b) Gdy $p = 1$, to przedłużeń Hahna-Banacha funkcjonału φ jest wiele, i każde z nich jest zadane wzorem postaci $\widetilde{\varphi}(x, y) = x + cy$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, gdzie $c \in [-1, 1]$.

c) Czy istnieje podprzestrzeń T przestrzeni $(\mathbb{R}^2, \| \|_\infty)$ i funkcjonał $\psi : T \to \mathbb{R}$, mający wiele przedłużeń Hahna–Banacha? Jeśli tak, podać wzór na ψ.

32. + a) Udowodnić istnienie takiej stałej C, że dla każdego wielomianu f stopnia ≤ 2020 spełniona jest nierówność $|f(-10)| \leq C \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

b) Dowieść że gdy wyżej odrzucić ograniczenie na stopnie wielomianów, to teza nie będzie prawdziwa. (Wskazówka: w oparciu o tw. Weierstrassa zauważyć, że zbiór funkcji wielomianowych zerujących się w punkcie -10 jest gęsty w przestrzeni wszystkich funkcji wielomianowych, rozpatrywanej z normą $\sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.)

33. Dowieść, że gdy przestrzeń $\ell^{\mathbb{R}}_\infty(\Gamma)$ podzielić przez podprzestrzeń funkcji stałych $\Gamma \to \mathbb{R}$, to dla otrzymanej normy ilorazowej $\| \|$ prawdziwa jest równość $\|[f]\| = \frac{1}{2}\big(\sup f - \inf f\big)$.

34. + Niżej V i W to przestrzenie unormowane. W oparciu o stwierdzenie 4 ze str. 17 notatek dowieść, że:

a) Przekształcenie $T \in \mathcal{L}(V, W)$ jest otwarte na swój obraz wtedy i tylko wtedy, gdy $\|Tv\|_W \geq c \cdot \mathrm{dist}(v, \ker(T))$ dla pewnej stałej $c > 0$ i wszystkich $v \in V$. Wywnioskować, że wraz z T własność ta przysługuje $T_{|V_0}$, gdy $V_0 \subset V$ jest podprzestrzenią.

b) Gdy $V_0 \leq V$ jest domkniętą podprzestrzenią, to przestrzeń $\{\varphi \in V^* : \varphi_{|V_0} = 0\}$ jest liniowo izometryczna z $(V/V_0)^*$. Ogólniej, $\widetilde{T} \mapsto \widetilde{T} \circ P$ jest izometrią $\mathcal{L}(V/V_0, W)$ na $\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T_{|V_0} = 0\}$. (Użyto oznaczeń z tego stwierdzenia.)

35. + Niech U i W będą podprzestrzeniami przestrzeni unormowanej V. Dowieść, że jeśli $\dim(W) < \infty$ i podprzestrzeń U jest domknięta, to $U + W$ też jest domknięta. (Wskazówka: $U + W = P^{-1}(P(W))$, gdzie $P : V \to V/U$ to rzutowanie.)

36. + Niech operator liniowy $L : V \to W$ pomiędzy przestrzeniami unormowanymi ma domknięte jądro. Dowieść, że jeśli $\dim W < \infty$, to operator ten jest ciągły. (Wskazówka: przedstawić L jako złożenie $V \to V/\ker(L) \to W$.)

37. + Mówimy, że funkcjonał $\varphi : V \to \mathbb{F}$ **osiąga** (lub **wybija**) swą normę, jeśli istnieje wektor $v \in V$ taki, że $\|v\| \leq 1$ i $\varphi(v) = \|\varphi\|$. (Musi wtedy być $\|v\| = 1$.) Dowieść, że funkcjonał $\varphi \in V^*$ osiąga swą normę wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze $\varphi^{-1}(1)$ istnieje wektor o najmniejszej normie.

38. a) Wyznaczyć normy następujących funkcjonałów na przestrzeni $C := C([0, 1])$, wyposażonej w normę $\| \|_{\sup}$:

$$\varphi(f) = \int_0^{1/2} f(t)\mathrm{d}t - \int_{1/2}^1 f(t)\mathrm{d}t, \qquad \psi(f) = \int_0^{1/2} \sin(t) f(t)\mathrm{d}t$$

b) Zbadać istnienie funkcji $f \in C$ takiej, że $\|f\| = 1$ i $\varphi(f) = \|\varphi\|$.

c) Dowieść, że w zbiorze $S = \varphi^{-1}(1) \subset C$ nie ma wektora o najmniejszej normie.

* * * * * * * * * *

39. Niech V i W będą przestrzeniami unormowanymi, przy czym $\dim(W) < \infty$. Dowieść, że każdy operator $L_0 \in \mathcal{L}(V_0, W)$ można przedłużyć do $L \in \mathcal{L}(V, W)$. (Nie żądamy, jak w twierdzeniu Hahna–Banacha, by $\|L\| = \|L_0\|$.) Wywnioskować, że jeśli W jest skończenie–wymiarową podprzestrzenią przestrzeni V, to istnieje ciągły rzut liniowy $P : V \to W$.

40. + Niech $p \in (1, \infty)$ i $f, g \in L_p(\mu)$. Udowodnić poniższe **nierówności Clarksona** (najważniejszy jest przypadek $\mathbb{F} = \mathbb{R}$; $\| \|$ to standardowa norma przestrzeni $L_p(\mu)$). Uzyskać z tych nierówności jednostajną wypukłość przestrzeni $L_p(\mu)$.

a) $\|(f+g)/2\|^p + \|(f-g)/2\|^p \le \frac{1}{2}(\|f\|^p + \|g\|^p)$ jeśli $p \in [2, \infty)$. (Wskazówka: gdy $L_p(\mu) = \mathbb{R}$ użyć różniczkowania lub odpowiedzi do zadania 25a).)

b)* $\left(\|(f+g)/2\|^q + \|(f-g)/2\|^q\right)^{p-1} \le \frac{1}{2}(\|f\|^p + \|g\|^p)$ jeśli $p \in (1, 2]$, gdzie $q = p/(p-1)$. (Wskazówka: sprowadzić do sytuacji podobnej do a), korzystając z tożsamości $\|h\|^q = \|\,|h|^q\|_{p-1}$ i zadania uzupełniającego 1 na str. 13 notatek.)

41. + a) Dowieść, że jeśli dla wektorów $x^k \in \ell_p$, gdzie $p \in [1, \infty)$, spełnione są warunki $\lim_k \|x^k\| = \|x^0\|$ i $\lim_k x_n^k = x_n^0$ dla $n = 1, 2, ...$, to $\lim_k \|x^k - x^0\| = 0$. (Tu, x_n^k to n-ta współrzędna wektora x^k. Wskazówka: przyjąć wpierw, że $\|x^k\| = 1$ dla $k = 0, 1, ...$)

b) Dowieść, że założenie $p \neq \infty$ jest istotne.

c) Czy teza a) pozostanie prawdziwa, jeśli warunek $\lim_k \|x^k\| = \|x^0\|$ zastąpić przez $\exists \lim_k \|x^k\|$?

d) Czy pozostanie ona prawdziwa, jeśli zastąpić przestrzeń ℓ_p przez c_0?

Uwaga. O ile nie powiedziano inaczej, przedziały $[0, 1]$ itp. wyposażamy w miarę Lebesgue'a. Oznaczenia c i c_0 są wyjaśnione na str. 15 notatek.

42. + Obliczyć normy następujących operatorów:

a) $\mathrm{id} : \ell_p^n \to \ell_q^n$, gdzie $p, q \in [1, \infty]$;

b) $T : \ell_1 \to c_0$ określone wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$;

c) $T : L_p([0, 1]) \to L_p([0, 1])$ określone wzorem $Tf = gf$, dla ustalonej funkcji $g \in L_\infty([0, 1])$;

d) $T : L_p([0, 1]) \to L_1([0, 1])$ dane wzorem $(Tf)(t) = tf(t)$.

43. Obliczyć wariację całkowitą $\|\mu\|$ następujących miar na $[0,1]$:

a) $\mu = \sum_n a_n \delta_{1/n}$, gdzie $(a_n) \in \ell_1$ i δ_t to miara jednostkowa, skoncentrowana w t.

b) $\mu(A) = \int_A f(t)dt$, gdzie $f \in L_1([0,1])$.

44. a) Udowodnić, że każda funkcja $g \in C([0,1])$ wyznacza wzorem $C([0,1]) \ni f \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ funkcjonał liniowy na $C([0,1])$, którego norma jest równa $\int_0^1 |g(t)|dt$.

b) Udowodnić, że funkcjonał $f \mapsto f(0)$ nie jest takiej postaci.

c) Wyznaczyć normę funkcjonału określonego formułą $\varphi(f) = f(0) - \int_0^{0.5} f(2t)dt$.

45. a) Niech $\varphi \in \ell_\infty^*$ spełnia warunki $\|\varphi\| \le 1$ i $\varphi(x) = \lim_n x_n$ dla $x = (x_n) \in c$. (Istnienie takich φ wynika np. z zadań o granicach Banacha lub z twierdzenia Hahna–Banacha.) Dowieść, że φ nie leży w obrazie zanurzenia kanonicznego $\ell_1 \to \ell_\infty^*$.

b) Podobnie, potraktujmy $C([0,1])$ jako podzbiór przestrzeni $L_\infty([0,1])$ i rozszerzmy funkcjonał $\varphi_0 \in C([0,1])^*$, zadany wzorem $\varphi_0(f) = f(0)$, do funkcjonału $\varphi \in L_\infty([0,1])^*$, z $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$. Dowieść, że φ nie leży w obrazie zanurzenia kanonicznego $L_1 \to L_\infty^*$.

46. a) Dowieść, że każdy wektor $g \in \ell_1$ wyznacza formułą $\varphi_g(x) = \sum_\gamma g(\gamma)x(\gamma)$ funkcjonał liniowy $\varphi_g : c_0 \to \mathbb{F}$, o normie równej $\|g\|_1$.

b) Ponadto, każdy funkcjonał $\varphi \in (c_0)^*$ jest postaci φ_g , dla $g \in \ell_1$ jednoznacznie wyznaczonego przez φ formułą $g(\gamma) = \varphi(1_{\{\gamma\}})$.

c) Dla $p \in [1,\infty)$ wyznaczyć podobną 1-1 odpowiedniość między funkcjonałami $\varphi \in (\ell_p(\Gamma))^*$ a wektorami $g \in \ell_q(\Gamma)$, gdzie $q := p/(p-1)$, i dowieść jej. (Wskazówka: gdy zbiór Γ jest skończony posłużyć się twierdzeniem 1 i zadaniem 1 w w §2.3. W ogólnym przypadku rozważać skończone zbiory $\Gamma' \subset \Gamma$ i obcięcia $\varphi_{|\{f \in \ell_p(\Gamma) : f_{|\Gamma\setminus\Gamma'} = 0\}}$; wykorzystać poprzedni przypadek do dowodu, że $\|g_\varphi\|_q \le \|\varphi\|$. W razie kłopotu z szeregami o nieprzeliczalnie wielu wyrazach ograniczyć się do przypadku przeliczalnego, $\Gamma = \mathbb{N}$.)

47. + Niech $\varphi \in L_p(\mu)^*$, gdzie $p \in [1,2)$ i $\mu(T) < \infty$. W ślad za H. Steinhausem dowieść, że:

a) Identycznościowe włożenie $J : L_2(\mu) \hookrightarrow L_p(\mu)$ jest poprawnie określone i ciągłe, skąd funkcjonał $\varphi \circ J$ jest ciągły na $L_2(\mu)$. (Por. zadanie 20.)

b) Wywnioskować istnienie funkcji $g \in L_2(\mu)$ takiej, że $\varphi(f) = \int fg \,\mathrm{d}\mu$ dla wszystkich $f \in L_2(\mu)$.

c) W oparciu o zadanie 1 w §2.3 i zadanie 20 dowieść, że $\|g\|_q < \infty$.

d) Wywnioskować, że formuła $\varphi_g(f) = \int fg \,\mathrm{d}\mu$ określa liniowy i ciągły funkcjonał φ_g na $L_p(\mu)$. Stąd i z gęstości $L_2(\mu)$ w $L_p(\mu)$ uzyskać równość $\varphi = \varphi_g$.

* * * * * * * * * *

48. a) Dowieść, że dla $a, b \in \mathbb{R}$ i $p > 1$ funkcja $t \mapsto |a + tb|^p$ ma w zerze pochodną, i wyznaczyć ją.

b) Niech $f, v \in L_p^{\mathbb{R}}(\mu)$ (nadal $p \in (1,\infty)$). Dowieść, że funkcja $t \mapsto \int |f - tv|^p$

ma w zerze pochodną, równą $\int hv$, gdzie $h := -p|f|^{p-1}\mathrm{Sgn} f \in L_q(\mu)$. (Wskazówka: skorzystać z twierdzenia o różniczkowaniu pod znakiem całki.)

49. Dowieść, że gdy μ jest miarą Lebesgue'a na $\mathbb{R}^n$, to zbiór wszystkich funkcji ciągłych o zwartych nośnikach jest gęsty: a) w $(L_1(\mu), \| \ \|_1)$, b) w $(L_1(\mu) \cap L_2(\mu), \| \ \|_1 + \| \ \|_2)$. (Wskazówka: rozumowanie ze str. 26 notatek. **Nośnik funkcji** f to domknięcie zbioru $\{x : f(x) \neq 0\}$.)

50. Na stronach 33–34 notatek z wykładu podane są w punktach B, C, D zastosowania wyników z ostatniego wykładu. Przeczytać ten materiał i opanować go; przypomnieć też sobie treść twierdzenia Baire'a, wykorzystanego w dowodzie Saksa.

51. + a) Dowieść, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) ma tę własność, że $(a_n x_n) \in \ell_1$ dla każdego $x = (x_n) \in c_0$, to $(a_n) \in \ell_1$. (Wskazówka: dowód twierdzenia Landaua.)

b) Dowieść, że gdy $f_n \in L_2([0,1])$ spełniają warunek $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n g = 0$ dla każdego $g \in L_2([0,1])$, to $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$.

c) Niech funkcja $f \in L_\infty([0,\infty))$ będzie taka, że dla każdej funkcji $g \in L_4([0,\infty))$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \int_0^n fg$. Dowieść, że $\int_0^\infty |f|^{4/3} < \infty$.

d) Czy w b) musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$?

52. * Dowieść następującego **twierdzenia Osgooda**: gdy X jest przestrzenią metryczną zupełną i ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to \mathbb{R}$ jest punktowo ograniczony, to na pewnym zbiorze otwartym jest on jednostajnie ograniczony. (Wskazówka: dowód twierdzenia Banacha-Steinhausa.)

* * * * * * * * * *

53. + Niech V i W będą przestrzeniami Banacha. Dowieść, że jeśli operator $T : V \to W$ jest liniowy i złożenie $\psi \circ T$ jest ciągłe dla każdego $\psi \in W^*$, to jest on ciągły. (Wskazówka: twierdzenie o wykresie domkniętym.)

54. + Niech V i W będą przestrzeniami Banacha, zaś operator $T \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie taki, że $T(V) \oplus X = W$ dla pewnej <u>domkniętej</u> podprzestrzeni X w W. Dowieść domkniętości $T(V)$ w W. (Wskazówka: przekształcenie $V \times X \ni (v, x) \to T(v) + x \in W$ jest otwarte na podstawie zasady otwartości Schaudera; uzasadnić i wykorzystać to, że przeprowadza ono $V \times (X \setminus \{0\})$ na $W \setminus T(V)$.)

55. Przyswoić sobie podane na str. 34-35 zastosowania D, E, F wyników z §5.2.

Uwaga 1. (GAL) By w przestrzeni pre-hilbertowskiej znaleźć rzut h_0 wektora v na $H_0 = \mathrm{lin}\{h_1, ..., h_n\}$, nie jest konieczne znajdowanie bazy ortonormalnej w H_0. Wygodniejsze może być napisanie $h_0 = \sum_j x_j h_j$ dla niewiadomych współczynników x_j i ułożenie i rozwiązanie układu równań $\sum_j x_j \langle h_j, h_i \rangle = \langle h_0, h_i \rangle$ $(i = 1, ..., n)$, otrzymanego z mnożenia równości $h_0 = \sum_j x_j h_j$ kolejno przez $h_1, ..., h_n$.

56. Wyznaczyć rzuty ortogonalne funkcji sin i funkcji cos na podprzestrzeń $H_0 = \mathrm{lin}\{1, t, t^3, t^3\}$ przestrzeni $H = L_2([-1, 1])$, i obliczyć odległość którejś z tych funkcji od podprzestrzeni H_0.

57. Znaleźć wielomian w stopnia ≤ 2, minimalizujący całkę $\int_{-1}^{1} (t^4 - w(t))^2 dt$.

58. Udowodnić, że iloczyn skalarny jest ciągłą funkcją na $H \times H$. Dla $A, B \subset H$ wywnioskować, że jeśli $A \perp B$, to $\mathrm{cl}_H A \perp \mathrm{cl}_H B$.

59. * Udowodnić, że jeśli przestrzeń V^* jest ośrodkowa, to V też. (Wskazówka: „stare" twierdzenia o oddzielaniu. O V zakładamy, że jest przestrzenią unormowaną; V^* rozpatrujemy ze zwykłą normą $\|\varphi\| = \sup |\varphi|(B_V)$.)

60. Niech $\dim V < \infty$ i $\| \ \|$ będzie normą na V. Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ jest bezwarunkowo zbieżny w $(V, \| \ \|)$, to jest zbieżny bezwględnie (tzn. $\sum_n \|v_n\| < \infty$).

Problem 4. Dowieść, że jeśli w przestrzeni unormowanej spełniona jest tożsamość równoległoboku, to jej norma jest wyznaczona przez iloczyn skalarny.

* * * * * * * * * * * * * * * * *

61. + (Przypomnienie GAL.) Niech $T \in \mathcal{L}(H, H)$, gdzie H to przestrzeń Hilberta. Dowieść, że (przypominam, że zanurzenie izometryczne nazywam izometrią, gdy jest „na"):

a) $\ker(T^h) = (\mathrm{im}(T))^\perp$ i $(\ker(T^h))^\perp = \overline{\mathrm{im}}(T)$.

b) T jest zanurzeniem izometrycznym (odp. izometrią) wtedy i tylko wtedy, gdy $T^h T = I$ (odp. $T^h = T^{-1}$); w szczególności jeśli T jest izometrią, to T^h również.

c) $(T^2 = T = T^h) \Leftrightarrow (T$ jest rzutowaniem ortogonalnym$)$.

62. Niech $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ i $(g_\beta)_{\beta \in B}$ będą bazami ortonormalnymi odpowiednio w $L_2(\mu)$ i $L_2(\nu)$, dla σ–skończonych miar μ i ν. Dowieść, że $\mathcal{F} := \{f_\alpha \otimes g_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$ jest bazą ortonormalną w $L_2(\mu \otimes \nu)$, gdzie $\mu \otimes \nu$ to miara produktowa, zaś $(f_\alpha \otimes g_\beta)(s, t) := f_\alpha(s) \cdot g_\beta(t)$ dla s i t z dziedzin funkcji f_α i g_β, odpowiednio.

63. Niech $(v_\alpha)_\alpha$ i $(w_\beta)_\beta$ będą bazami ortonormalnymi przestrzeni Hilberta H i niech $T \in \mathcal{L}(H, H)$. Przekształcając liczbę $\sum_\alpha \sum_\beta |\langle T v_\alpha, w_\beta \rangle|^2$ przy pomocy tożsamości Parsevala dowieść, że jest ona równa tak $\sum_\alpha \|T v_\alpha\|^2$, jak i $\sum_\beta \|T^h w_\beta\|^2$. Wywnioskować, że liczba $\|T\|_{HS} := \sqrt{\sum_\alpha \|T v_\alpha\|^2} \in [0, \infty]$ nie zależy od bazy (v_α), i że $\|T\|_{HS} = \|T^h\|_{HS}$. Dowieść też, że $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

64. Niech miara μ będzie σ–skończona i $K : L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ będzie **operatorem całkowym Hilberta–Schmidta z jądrem** $k \in L_2(\mu \otimes \mu)$, tzn. niech $Kf(t) := \int k(s, t) f(s) d\mu(s)$ dla $f \in L_2(\mu)$. Dowieść, że:

a) $\|K\|_{HS} = \|k\|_2$. (Wskazówka: obrać w $L_2(\mu)$ bazę ortonormalną $(f_\alpha)_\alpha$ i wykazać, że jeśli $k = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \overline{f_\alpha} \otimes f_\beta$, patrz zad. 62, to $\langle K f_\alpha, f_\beta \rangle = c_{\alpha\beta}$.)

b) $\|K\| < \infty$ i K^h wyraża się takim wzorem jak K, z $\overline{k}(t, s)$ w miejsce $k(s, t)$.

65. W $L_2([-\pi,\pi])$ rozwinąć funkcję $t_{|[-\pi,\pi]}$ w szereg Fouriera względem układu $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathbf{i}nt}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ i wypisać wynikającą stąd tożsamość Parsevala.

66. Dowieść poniższych własności wielomianów Czebyszewa T_n z §7.1 notatek:

a) $T_0 = 1, T_1 = x,\ T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}$ dla $n \geq 2,\ \deg(T_n - 2^{n-1}x^n) < n.$

b) $T_n(t) \in [-1,1]$ dla $t \in [-1,1]$,

c) Istnieje ciąg $1 \geq t_0 > t_1 ... > t_n \geq -1$ taki, że $T_n(t_i) = (-1)^i$ dla $i = 0, 1, ..., n$. Wskazać ten ciąg i wszystkie pierwiastki wielomianu T_n.

d) Gdy przyjąć $\|p\| = \sup_{t\in[-1,1]} |p(t)|$ dla $p \in \mathbb{R}[x]$, to $\| \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \| \geq |c_n|/2^{n-1}$. (Wskazówka: niech wpierw $c_n = 1$. Zauważyć, że przy $p := \sum_{j=0}^{n-1} c_j x^j$ zachodzi $p(t_i)(-1)^i > 0$ dla pewnego $i = 0, ..., n$.)

e) W d) nie można zastąpić 2^{n-1} mniejszą liczbą. (Wskazówka: rozpatrzeć T_n.)

67. Niech $v_n \in \mathbb{R}[t]$ będzie ciągiem wielomianów, otrzymanych z układu $1, t, t^2, ...$ przez ortogonalizację Grama–Schmidta w przestrzeni $L_2([-1,1])$. Dowieść, że:

a) Jeśli $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ jest ciągiem wielomianów, w którym każdy wielomian $w_n (n \geq 1)$ jest w $L_2([-1,1])$ ortogonalny do $\mathrm{lin}(1, t, ..., t^{n-1})$ i jest stopnia n, to każdy wielomian w_n jest proporcjonalny do v_n, tzn. $w_n = c_n v_n$ dla pewnego $c_n \in \mathbb{R}$.

b) Dowieść, że jeśli przez w_n oznaczyć n-tą pochodną wielomianu $(t^2-1)^n$, podzieloną przez $2^n n!$, to $w_n(1) = 1$ i układ $(w_n)_{n=0}^{\infty}$ spełnia warunki z a) – czyli jest to ciąg wielomianów Legendre'a.

68. a) Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ rodzinę przedziałów postaci $P = [k/2^n, (k+1)/2^n)$, gdzie $0 \leq k < 2^n$ i $n = 0, 1, \ldots$. Udowodnić, że:

a) zbiór $\{1_P : P \in \mathcal{P}\}$ jest liniowo gęsty w $L_2([0,1])$.

b) układ Haara z §7.1 notatek jest bazą ortonormalną w $L_2([0,1])$.

69. + a) Przy oznaczeniach ze str. notatek dowieść, że $T^{**} \circ J_V = J_W \circ T$ (równoważnie: $T^{**}{}_{|V} = T$, gdy traktować V i W jako zanurzone w V^{**} i W^{**}, odpowiednio).

b) * Udowodnić, że złożenie $(J_V)^* \circ J_{V^*}$ jest identycznością na V^*, gdzie $J_V : V \to V^{**}$ i $J_{V^*} : V^* \to V^{***}$ to zanurzenia kanoniczne.

Definicja. (i uwaga) Ciąg (x_n) wektorów przestrzeni unormowanej X **zbiega słabo do** $x_0 \in X$, gdy dla każdego funkcjonału $\varphi \in X^*$ ciąg $(\varphi(x_n))$ jest zbieżny do $\varphi(x_0)$. (Częste oznaczenie: $x_n \rightharpoonup x$.) Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

(*) $\sup_n \|x_n\| < \infty$ i zbieżność $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0)$ zachodzi dla wszystkich φ z pewnego zbioru E, liniowo gęstego w $(X^*, \| \ \|)$.

(Równoważność wynika z wniosku 1 w §5.1, przez rozpatrzenie funkcjonałów określonych na przestrzeni Banacha $(X^*, \| \ \|)$ wzorem $X^* \ni \varphi \mapsto \varphi(x_n)$.)

70. +a) Dowieść, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni c_0 wtedy i tylko wtedy jest słabo zbieżny do $x \in c_0$, gdy jest ograniczony w c_0 i jest zbieżny do x „po współrzędnych", tzn. $x_n(k) \to x(k)$ dla $k = 1, 2, ...$ (Tu $y(k)$ to k-ta współrzędna ciągu $y \in c_0$.)

b) Dowieść, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni c wtedy i tylko wtedy jest słabo zbieżny do $x \in c$, gdy jest ograniczony w c i zbieżny do x po współrzędnych, a ciąg skalarów $(\lim x_n)_{n=1}^\infty$ jest zbieżny do granicy $\lim x$ ciągu x.

* * * * * * * * * * * * * * * * *

Ponieważ zbliża się koniec semestru, więc pozostałe zadania kumuluję dzieląc je tematycznie. Tylko część z nich omówimy na ćwiczeniach, pozostałe należy traktować jako przygotowawcze do egzaminu, a może niektóre Państwa zainteresują. Wybrane zadania będziemy omawiać w miarę postępu wykładu; zachęcam do wpływania na to, które będą wybrane.

Jako porcję na ćwiczenia 7 I 2021 wyznaczam 71, 72, 78, 79, 88, 89, 101,103, 104 a),b),d). (Te numery proszę wpisywać do tabelki omawianych zadań.)

Różne.

71. Dowieść, że $(x_n)_{n=0}^\infty \mapsto (x_0+x_1, x_0+x_2, ...)$ jest izomorfizmem liniowo–topologicznym z przestrzeni $c_0(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ wszystkich ciągów $(x_n)_{n=0}^\infty$ zbieżnych do 0, na przestrzeń c wszystkich ciągów zbieżnych $(x_n)_{n=1}^\infty$.

72. $+$ Dla $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ oznaczmy przez φ_i funkcjonał na przestrzeni c (a więc i na jej podprzestrzeni c_0) określony wzorem $\varphi_i(y) = \lim y$ gdy $i = 0$ oraz $\varphi_i(y) = y_i$ gdy $i > 0$.

a) Dowieść, że $x \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i\varphi_i$ jest liniową izometrią przestrzeni $\ell_1(\mathbb{Z}_{\geq 1})$ na c_0^*.

b) Dowieść, że $x \mapsto \sum_{i=0}^\infty x_i\varphi_i$ jest liniową izometrią przestrzeni $\ell_1(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ na c^*.

c) *. Znaleźć związek części b) z twierdzeniem 1 w §4.3 (o reprezentacji przestrzeni $C(X)^*$, dla zwartych X).

73. Niech $(v_n)_{n=1}^\infty$ będzie układem wektorów przestrzeni Banacha $(V, \| \ \|)$. Dowieść równoważności warunków (w nich „zbieżność" oznacza zbieżność w normie $\| \ \|$):

a) Dla każdej bijekcji $\mathbb{N} \ni i \mapsto n(i) \in \mathbb{N}$, szereg $\sum_i v_{n(i)}$ jest zbieżny.

b) Dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $N_\varepsilon > 0$ taka, że gdy zbiór $F \subset \mathbb{N}$ jest skończony i $\inf F > N_\varepsilon$, to $\| \sum_{i \in F} v_i \| < \varepsilon$.

c) Suma szeregu w a) nie zależy od rozważanej bijekcji.

d) Dla każdego rosnącego ciągu $(i_n)_{n=1}^\infty$ liczb naturalnych, szereg $\sum_n v_{i_n}$ jest zbieżny.

e) Dla każdych $\varepsilon_n = \pm 1$, szereg $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n v_n$ jest zbieżny.

74. * Niech X i Y będą rozłącznymi, domkniętymi zbiorami wypukłymi w skończenie wymiarowej przestrzeni unormowanej V nad $\mathbb{R}$. Dowieść istnienia takiego funkcjonału $\varphi \in V^* \setminus \{0\}$, że $\sup \varphi(X) \leq \inf \varphi(Y)$. (Porównaj zadanie 15.)

75. $+$ Dowieść twierdzenia S. Mazura: jeśli podzbiór S przestrzeni Banacha jest zwarty, to zbiór $\overline{\mathrm{conv}}(S)$ też jest zwarty. (Wskazówka: gdy $\{x_1, ..., x_n\}$ jest ε–siecią dla S, tzn. $S \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + \varepsilon B_V)$, to $\mathrm{conv}(S) \subset \mathrm{conv}\{x_1, ..., x_n\} + \varepsilon B_V$.)

76. a) Określmy przekształcenie $f : \ell_1 \to \ell_1$ wzorem $f(x) = (1 - \|x\|_1, x_1, x_2, ...)$.

Dowieść, że jest ono ciągłe, że $f(\overline{B}_{\ell_1}) \subset \overline{B}_{\ell_1}$ i f nie ma punktu stałego.

b) Określić ciągłą retrakcję kuli $\overline{B}_{\ell_1}$ na jej brzeg.

77. a) W przestrzeni unormowanej V obierzmy zbiór gęsty A i rodzinę funkcjonałów $\varphi_a \in V^*$, takich, że $\|\varphi_a\| = 1$ i $\varphi_a(a) = 1$ dla $a \in A$. Dowieść, że wzór $v \mapsto (\varphi_a(v))_{a\in A}$ zadaje liniowe zanurzenie izometryczne przestrzeni V w $\ell_\infty(A)$. Wywnioskować, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest liniowo izometryczna z pewną domkniętą podprzestrzenią przestrzeni ℓ_∞ (która jednak nie jest ośrodkowa).

b) Niech V będzie ośrodkową przestrzenią unormowaną, zaś przez X oznaczmy kulę $\overline{B}_{V^*}$, wyposażoną w metrykę d z zadania 84, czyniącą X zwartą przestrzenią metryczną. Dowieść, że przyjmując $(Tv)(\varphi) := \varphi(v)$ dla $v \in V, \varphi \in X$, uzyskujemy liniowe zanurzenie izometryczne $T : V \to C(X)$. (Tym razem, przeciwdziedzina też jest ośrodkowa).

Zbieżność słaba w V i słaba wstecz (punktowa) w V^*.

78. (c.d. zadania 70.) c) Dla $p \in (1, \infty)$ dowieść, że ciąg funkcji $f_n \in L_p([0, 1])$ wtedy i tylko wtedy jest słabo zbieżny do 0, gdy $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ i $\int_0^s f_n(t)\mathrm{d}t \to 0 \forall s \in [0, 1]$.

d)* Dla przestrzeni zwartej X dowieść, że ciąg funkcji $f_n \in C(X)$ jest słabo zbieżny do $f \in C(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_n \|f_n\|_{\mathrm{sup}} < \infty$ i $\lim_n f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in X$.

79. + Dowieść, że gdy układ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni Hilberta jest ortonormalny, to ciąg (v_n) jest słabo zbieżny do 0.

80. Dowieść, że ciąg funkcji Rademachera jest zbieżny słabo do 0 w $L_p(I)$ dla $p \in (1, \infty)$.

81. Niech $(V, \|\ \|)$ będzie rzeczywistą, jednostajnie wypukłą przestrzenią Banacha (patrz §2.4) i niech $\varphi \in V^*$, $\|\varphi\| = 1$.

a) Dowieść, że przy $C_\varepsilon := \{v : \varphi(v) \geq 1-\varepsilon \text{ i } \|v\| \leq 1+\varepsilon\}$ zachodzi $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{diam} C_\varepsilon = 0$. Wywnioskować, że φ wybija swą normę.

b) * Dowieść, że gdy ciąg $(v_n)_{n=1}^\infty$ wektorów z V zbiega słabo do $v \in V$, przy czym $\|v_n\| \to \|v\|$, to $\|v - v_n\| \to 0$. (Wskazówka: a) dla odpowiedniego φ, zależnego od v.) Zauważyć związek b) z zadaniami 41 (dla $p \neq 1$) i 88, w tym upewnić się o jednostajnej wypukłości rozważanych tam przestrzeni.

82. + a) Kiedy ciąg wektorów $x_n = (x_n(k))_{k=1}^\infty$ zbiega do 0 słabo wstecz w przestrzeni $\ell_1 = c_0^*$? (Równoważnie: kiedy ciąg funkcjonałów, z których n-ty jest wyznaczony przez x_n w sposób opisany w zadaniu 72, jest punktowo zbieżny do 0?)

b) To samo pytanie, lecz z ℓ_1 zastąpionym przez $\ell_1(\mathbb{Z}_{\geq 0})$, a c_0 przez c.

83. Niech S będzie podzbiorem przestrzeni unormowanej $(V, \|\ \|)$. Dowieść twierdzenia S. Mazura: Jeśli ciąg elementów zbioru S jest słabo zbieżny do $v \in V$, to v należy do $\overline{\mathrm{conv}}(S)$, domknięcia uwypuklenia zbioru S. (Wskazówka: jeśli $v \notin \overline{\mathrm{conv}}(S)$, to v można oddzielić od $\overline{\mathrm{conv}}(S)$ funkcjonałem ciągłym.)

84. * Niech $(V, \| \ \|)$ będzie ośrodkową przestrzenią unormowaną. Dowieść, że:

a) Zbieżność punktowa funkcjonałów z kuli $\overline{B}_{V^*} := \{\varphi \in V^* : \|\varphi\| \leq 1\}$ jest metryzowalna, tzn. istnieje na tej kuli taka metryka d, że dla każdych $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \in \overline{B}_{V^*}$ zachodzi $(d(\varphi_n, \varphi) \to 0) \Leftrightarrow (\varphi_n(x) \to \varphi(x) \forall x \in V)$.

b) Przestrzeń metryczna $(\overline{B}_{V^*}, d)$ jest zwarta.

Przestrzeń Hilberta.

85. Udowodnić, że gdy H_0 i H_1 są podprzestrzeniami liniowymi przestrzeni Hilberta, to $(H_0^\perp)^\perp = \mathrm{cl}_H H_0$ i $(H_0 + H_1)^\perp = H_0^\perp \cap H_1^\perp$. Ponadto, $H_0^\perp = X^\perp$ dla każdego zbioru X, liniowo gęstego w H_0.

86. W przestrzeni Hilberta $H = L_2^{\mathbb{R}}([0,1])$ niech $U = \{f \in H : \int_0^1 f(t)dt = 0\}$ i $V = \{f \in H : \int_0^1 t^2 f(t)dt = 0\}$. Dowieść, że są to domknięte podprzestrzenie liniowe przestrzeni H i znaleźć bazy ortogonalne każdej z przestrzeni $U^\perp, V^\perp$ i $(U \cap V)^\perp$. Znaleźć też rzut ortogonalny funkcji t na $U \cap V$.

87. Niech H będzie przestrzenią Hilberta i niech $v, w \in H \setminus \{0\}$. Dowieść istnienia takiej izometrii liniowej $T \in \mathcal{L}(H)$, że $T(v^\perp) = w^\perp$.

88. $+$ Udowodnić, że jeśli ciąg $(v_n)_{n=0}^\infty$ wektorów w przestrzeni Hilberta H spełnia warunki $\lim_n \|v_n\| = \|v_0\|$ i $\lim_n \varphi(v_n) = \varphi(v_0) \forall \varphi \in H^*$, to jest zbieżny. Jednak ciąg (e_n) w przestrzeni ℓ_2 nie jest zbieżny, choć zbieżne są ciągi $(\|e_n\|)$ i $(\varphi(e_n))$, $\forall \varphi \in \ell_2^*$. (Uzasadnić to.) Czy jest tu sprzeczność?

89. Niech $\varphi_0 \in H_0^*$, gdzie H_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta H.

a) $+$ Udowodnić, że istnieje jedyne przedłużenie $\varphi \in H^*$ funkcjonału φ_0 takie, że $\|\varphi\| = \|\varphi_0\|$, i że jest ono zadane wzorem $\varphi = \varphi_0 \circ P$, gdzie $P : H \to H_0$ to rzut ortogonalny.

b) Określić φ wzorem, gdy $H_0 = a^\perp$ i $\varphi_0(x) = \langle x, b \rangle$, gdzie $a, b \in H \setminus \{0\}$ są dane.

90. Niech $(H, \langle \ , \ \rangle)$ będzie przestrzenią Hilberta.

a) Dla każdego wektora $v \in H \setminus \{0\}$ przyjmijmy $v' = \frac{1}{\|v\|^2} v$. (Przekształcenie $v \mapsto v'$ nazywane jest inwersją względem sfery $\|x\| = 1$.) Dowieść, że $\|v' - w'\| = \|v - w\| / \|v\| \cdot \|w\|$ dla $v, w \in H \setminus \{0\}$.

b) Uzyskać stąd nierówność Ptolemeusza: $\|v - x\| \cdot \|w - y\| \leq \|v - w\| \cdot \|x - y\| + \|v - y\| \cdot \|w - x\|$ dla $v, w, x, y \in H$.

c) Uogólnić nierówność równoległoboku następująco: dla $x_1, \ldots, x_n \in H$ zachodzi $\sum_\varepsilon \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \|^2 = 2^n \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$, gdzie sumowanie jest po wszystkich ciągach $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$. (Ciągów tych jest 2^n, więc teza mówi, że wartość średnia liczb $c_\varepsilon = \| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \|^2$ jest równa $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$.)

91. Niech $T \in \mathcal{L}(H)$, gdzie H jest zespoloną przestrzenią Hilberta. Dowieść, że:

a) Jeśli $\langle Tx, x\rangle = 0$ dla wszystkich $x \in H$, to $T = 0$. (Wskazówka: w tożsamości tej przyjąć $x = y + z$.)

b) Jeśli $\|Tx\| = \|T^h x\|$ dla wszystkich $x \in H$, to operator T jest normalny.

c) Jeśli $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ dla wszystkich $x \in H$, to operator T jest samosprzężony.

92. a) Niech $H = L_2(\mathbb{R})$ i niech $K(f)(t) = \sin(t)f(t+1)$ oraz $L(f)(t) = \sin(t-1)f(t-1)$ dla $f \in H$ i $t \in \mathbb{R}$. Dowieść, że operatory $K, L : H \to H$ są ciągłe i wzajemnie sprzężone hermitowsko.

b) Niech $H = \ell_2$ i niech operator $K \in \mathcal{L}(H)$ będzie zadany wzorem

$$K(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \ \text{ dla } \ x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2.$$

Wyrazić wzorem operator K^h, sprzężony hermitowsko do K.

c) Jak w b), lecz przy $H = L_2^{\mathbb{C}}([0,1])$ i $(Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds$ dla $f \in H$ i $t \in [0,1]$.

93. + Wyrazić transformatę Fouriera funkcji $1_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przez funkcję $g(y) := \sin y/y$ i obliczyć $\int_{\mathbb{R}} g^2$.

Sprzężenie hilbertowskie i banachowskie.

94. + (Hellinger i Toeplitz) Dowieść, że operatory liniowe $K, L : H \to H$ na przestrzeni Hilberta H, spełniające warunek $\langle Kx, y\rangle = \langle x, Ly\rangle$ dla każdych $x, y \in H$, są ciągłe.

95. Niech $T \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie V i W to przestrzenie unormowane. Dowieść, że:
a) + (Obraz T jest gęsty w W) $\Leftrightarrow$ ($\ker(T^*) = \{0\}$).
b) + Jeśli T jest zanurzeniem, to T^* jest „na” (więc i otwarte, z zasady otwartości i zupełności V^* i W^*).
c) Jeśli przekształcenie T jest niemal otwarte [1], to T^* jest zanurzeniem.
d) $\ker(T^*) = \{\psi \in W^* : \psi_{|\mathrm{im}(T)} = 0\} \cong (W/\overline{\mathrm{im}}(T))^*$, gdzie $\cong$ to izometryczność.

96. Przy oznaczeniach powyższego zadania:

i) Ma miejsce implikacja odwrotna do b). (Wskazówka: do T^* użyć c) i zadania 2a).)

ii) Ma też miejsce implikacja odwrotna do c). (Wskazówka: przykład 1a) w §1.5.)

iii) Jeśli V jest przestrzenią Banacha, to (T^* jest izomorfizmem)$\Leftrightarrow$(T jest izomorfizmem). (Wskazówka: $\Rightarrow$ uzyskać z i), ii) i Lematu 2 w §5.2.)

97. + Niech $V = X \oplus Y$ i $P : V \to X$ będzie rzutowniem na X wzdłuż Y. Dowieść, że $\varphi \mapsto (\varphi_{|X}, \varphi_{|Y})$ jest izomorfizmem V^* na $X^* \oplus Y^*$, przy którym operatorowi $P^* : X^* \to V^*$ odpowiada włożenie $X^* = X^* \times \{0\} \hookrightarrow X^* \oplus Y^*$. Wywnioskować, że $V^*/\mathrm{im}(P^*) \cong Y^*$.

[1] Definicja i związek z innymi warunkami są w §5.2. (Patrz lematy 1 i 2).

98. Definiujemy operator $R : \ell_2 \to \ell_2$ wzorem $Rx = (0, x_1, x_2, ...)$. Obliczyć $\langle (R + R^h)e_1, e_1 \rangle$.

99. Niech (λ_n) będzie zbieżnym do 0 ciągiem skalarów, niech $T(x_1, x_2, \dots) = (\lambda_n x_n)_n$, przy czym T traktujemy jako operator z przestrzeni X do X, opisanych niżej. Przy naturalnym utożsamieniu X^* z ℓ_1 (patrz zadanie 72), wyznaczyć wzorem operator $T^* : \ell_1 \to \ell_1$, gdy a) $X = c_0$, b) $X = c$.

100. * Niech V i W będą przestrzeniami Banacha, a operator $S \in \mathcal{L}(V, W)$ będzie „na". Dowieść istnienia takiej liczby $\varepsilon > 0$, że każdy operator $T : V \to W$ spełniający warunek $\|S - T\| < \varepsilon$ jest „na".

Twierdzenia spektralne i tematy pokrewne.

Zadania 101–108 dotyczą omawianego teraz materiału i są kluczowe dla jego zrozumienia. Na pewno wśród zadań na egzaminie pojawią się zadania bardzo zbliżone. (Począwszy od zadania 104c), wykorzystywać oba twierdzenia spektralne i „Dodatek", choć twierdzeń jeszcze nie dowiedliśmy.)

101. $+$ Niech izometria liniowa $U : H_1 \to H_2$ i operatory $T_i \in \mathcal{L}(H_i)$ $(i = 1, 2)$ będą takie, że $U^{-1}T_2U = T_1$. Dowieść, że:

a) $T_1^h = U^{-1}T_2^hU$, a gdy operator T_1 jest samosprzężony (odp. unitarny wzgl. normalny), to T_2 też ma tę własność.

b) Gdy $v \in H_1$ i $\lambda \in \mathbb{F}$ są takie, że $T_1v = \lambda v$, to $T_2w = \lambda w$ dla $w := Uv$.

c) $\sigma_{T_1} = \sigma_{T_2}$ i $\|T_1\| = \|T_2\|$, a gdy $T_1 \geq 0$, to i $T_2 \geq 0$. (Dla operatora T piszemy $T \geq 0$ i mówimy, że jest on **nieujemny**, jeśli $T = T^h$ i $\langle Th, h \rangle \geq 0$ dla $h \in H$.)

102. $+$ Niech $T \in \mathcal{L}(\ell_2)$ będzie operatorem mnożenia przez ciąg $(\lambda_n) \in \ell_\infty$, tzn. $T((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n$.

a) Dowieść, że $\sigma_T = \mathrm{cl}_{\mathbb{F}}\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Wywnioskować, że każdy niepusty zbiór zwarty w $\mathbb{F}$ jest widmem pewnego operatora mnożenia na przestrzeni $\ell_2^{\mathbb{F}}$.

b) Dowieść, że dla $\lambda \in \sigma_T \setminus \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ operator $T - \lambda I$ jest 1-1 i ma gęsty obraz.

c) Dowieść, że ℓ_2 ma bazę ortonormalną, złożoną z wektorów własnych operatora T.

103. $+$ Ogólniej, niech $M_u \in \mathcal{L}(L_2(\mu))$ będzie operatorem mnożenia przez $u \in L_\infty(\mu)$.

a) Przy $\sigma := \{\lambda \in \mathbb{F} : \mu(u^{-1}(G)) > 0$ dla każdego otoczenia G punktu $\lambda\}$ dowieść, że $\mu\left(u^{-1}(\mathbb{F} \setminus \sigma)\right) = 0$, a zbiór σ jest domknięty i zawarty w kole $|\lambda| \leq \|u\|_\infty$.

b) Dowieść, że jeśli $\mu \neq 0$, to $\sigma \neq \emptyset$ i przyporządkowanie $B_b(\sigma) \ni f \mapsto M_{f \circ u}$ spełnia warunki h), n), p) twierdzenia 2. (Funkcje $f \circ u$ są określone p.w.)

c) Z „Dodatku" do twierdzenia 2 wywnioskować, że $\sigma = \sigma_{M_u}$ i $f(M_u) = M_{f \circ u}$.

Uwaga 2. Wobec twierdzenia 1, gdy jakaś własność operatorów normalnych przysługuje operatorom mnożenia i jest niezmiennicza względem unitarnego podobieństwa, to przysługuje ona każdemu operatorowi normalnemu. (Tak jest przy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$; gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

dotyczy to operatorów samosprzężonych.) Oparte na tym są poniższe zadania; należy w nich wpierw rozpatrzeć operatory mnożenia. (W zad. 104 wykorzystać zad. 103.)

104. Dowieść, że gdy T jest operatorem samosprzężonym i $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, lub normalnym i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, to:

a) $+\sigma_{f(T)} \subset \mathrm{cl}(f(\sigma_T))$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$, przy czym $\sigma_{f(T)} = f(\sigma_T)$ gdy $f \in C(\sigma_T)$.

b) + Podobnie, $g(f(T)) = (g \circ f)(T)$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$ i $g \in B_b(\mathrm{cl} f(\sigma_T))$.

c) Dla $\lambda \in \sigma_T$, operator $1_{\{\lambda\}}(T)$ jest rzutowaniem ortogonalnym na $\ker(T - \lambda I)$.

d) + Gdy miara μ, funkcja $u \in L_\infty(\mu)$ i izometria $U : L_2(\mu) \to H$ są takie że $T = UM_uU^{-1}$ (co może mieć miejsce dla różnych U, μ i u), to zawsze $\sigma_T = \sigma_{M_u}$ i $f(T) = UM_{f\circ u}U^{-1}$ dla $f \in B_b(\sigma_T)$.

e) W twierdzeniu 1 można żądać, by $\mathrm{im}(u) \subset \sigma_T$.

105. Przy tych samych założeniach o T dowieść, że:

f) $\ker(T - \lambda I) \perp \ker(T - \mu I)$ jeśli $\lambda \neq \mu$.

g) Operator T jest: i) unitarny $\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset \{\lambda : |\lambda| = 1\}$; ii) samosprzężony $\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset \mathbb{R}$; iii) nieujemny$\Leftrightarrow$ $\sigma_T \subset [0, \infty)$.

h) Gdy operator T jest nieujemny, to określony jest operator $S := \sqrt{T}$ (wynik zastosowania funkcji $\sqrt{\ }$ do T); przy tym $S \geq 0$ (definicja w zad. 101c)) i $S^2 = T$.

i)* Dowieść też, że S jest jedynym operatorem mającym ostatnie 2 własności. (Wskazówka: przypuścić, że ma je też operator Q. Skorzystać z zadania 104b) przy T zamienionym na S i odpowiednich funkcjach f, g, by uzyskać równość $Q = \sqrt{T}$.)

106. + Niech $T \in \mathcal{L}(H)$. W oparciu o zadanie 7 dowieść, że T ma **rozkład biegunowy**:

a) Istnieje nieujemny operator $S \in \mathcal{L}(H)$ taki, że $S^2 = T^hT$; jest nim $\sqrt{T^hT}$.

b) Istnieje taka izometria liniowa $U : \mathrm{im}(S) \to \mathrm{im}(T)$, że $T = US$. (Wskazówka: dla $x \in H$ zachodzi $\|Sx\| = \|Tx\|$, bo $\|Tx\|^2 = \langle T^hTx, x\rangle = \langle S^2x, x\rangle = \|Sx\|^2$.)

107. + Niech V i W będą przestrzeniami Banacha i niech $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.

a) Dowieść, że jeśli T jest izomorfizmem i $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, to S też nim jest.

b)* Dowieść, że operacja $\mathrm{GL}(V) \ni T \mapsto T^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ jest ciągła.

108. + Niech $Sx = (x_2, x_3, \dots)$ dla $x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$. Dowieść, że:

a) Jeśli $|\lambda| < 1$, to λ jest wartością własną operatora S i wobec tego operator $\lambda I - S$ nie jest odwracalny.

b) Gdy $|\lambda| > 1$, to operator $\lambda I - S$ jest odwracalny. Dać też jawny wzór na rozwiązanie równania $(\lambda I - S)x = y$ gdy $y \in \ell_2$ i $|\lambda| > 1$.

c) Czym jest σ_S?

Operatory zwarte i operatory Fredholma.

109. Operatory $K \in \mathcal{L}(\ell_2)$ i $T \in \mathcal{L}(L_2([0, 1]))$ zdefiniowane są wzorami $K(x) =$

$(0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ i $(Tf)(t) = tf(t)$. Dowieść, że operatory te nie mają wektorów własnych, przy czym operator K jest zwarty, a T – samosprzężony. Wyznaczyć też operator K^h i jego wartości własne.

110. + Niech X będzie jedną z przestrzeni c lub c_0 lub ℓ_p, gdzie $p \in [1, \infty)$.

a) Dowieść, że dla każdego skończonego zbioru $F \subset X$ i liczby $\varepsilon > 0$ istnieje rzut liniowy $P : X \to X$, taki, że $\|P\| \leq 1$, przestrzeń $P(X)$ jest skończonego wymiaru i $\|P(x) - x\| \leq \varepsilon$ dla $x \in F$.

b) W oparciu o to dowieść, że gdy operator $K : X \to X$ jest zwarty, to $\|K - K_n\| \to 0$ dla pewnego ciągu (K_n) operatorów skończenie–wymiarowych.

111. a) Operator K zadany jest wzorem $(Kf)(t) = \int_0^1 k(s,t)f(s)ds$ dla $f \in C([0,1])$.

a) Przy założeniu, że $k \in C([0,1]^2)$ dowieść, że K przyjmuje wartości w $C([0,1])$ i operator $K : C([0,1]) \to C([0,1])$ jest zwarty. (Wskazówka: tw. Arzelego i Ascoli.)

b) Dowieść tego samego przy założeniu, że funkcja $[0,1] \ni t \mapsto k(\cdot, t)$ przyjmuje wartości w $L_1([0,1])$ i jest ciągła jako funkcja z $[0,1]$ w $L_1([0,1])$.

112. a) W oparciu o b) z poprzedniego zadania dowieść, że formuła $(Kf)(t) = \int_0^t f(s)ds$ zadaje zwarty operator $K : C([0,1]) \to C([0,1])$.

b) Znaleźć wartości własne i spektrum tego tzw. *operatora Volterry*.

c) Ta sama formuła zadaje zwarty operator z $L_2([0,1])$ w $L_2([0,1])$, patrz przykład ..... notatek do wykładu. Dowieść, że nie ma on wartości własnych i wobec tego nie jest operatorem normalnym.

113. V jest przestrzenią Banacha, a operator $K : V \to V$ jest zwarty. Dowieść, że jeśli $\dim K(V) = \infty$, to 0 leży w domknięciu obrazu (przy K) sfery $\{v \in V : \|v\| = 1\}$.

<u>Problem 5.</u> i) Niech ciąg $(T_i : V_i \to V_{i+1})_{i=0}^{n-1}$ przekształceń liniowych między przestrzeniami wektorowymi skończonych wymiarów będzie **dokładny**, tzn. niech $\mathrm{im}(T_i) = \ker(T_{i+1})$ dla $i = 0, ..., n-1$. Dowieść, że jeśli $V_0 = V_n = \{0\}$ oraz $\dim V_i < \infty$ dla $i = 1, ..., n-1$, to $\sum_i (-1)^i \dim(V_i) = 0$.

ii) Niech ciąg $\{0\} \to V_1 \hookrightarrow V_2 \to V_3 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to \{0\}$ będzie dokładny. Dowieść, że jeśli $\dim V_i + \dim W_i < \infty$ dla dwóch indeksów $i \in \{1, 2, 3\}$, to jest tak i dla pozostałego indeksu.

iii) Dowieść, że przekształcenia liniowe $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{T} Z$ wyznaczają ciąg dokładny

$\{0\} \to \ker(S) \hookrightarrow \ker(TS) \xrightarrow{S_|} \ker(T) \xrightarrow{\Pi_|} Y/\mathrm{im}(S) \xrightarrow{\widetilde{T}} Z/\mathrm{im}(TS) \xrightarrow{J} Z/\mathrm{im}(T) \to \{0\}$.

Należy bądź domyślić się znaczenia użytych symboli i dowieść dokładności ciągu, bądź tylko dowieść istnienia operatorów czyniących ciąg dokładnym, korzystając z „lematu o wężu"; takie rozwiązanie znaleźć można w stackexchange.

iv) W oparciu o powyższe, udowodnić twierdzenie 1c) ze str. 67 notatek do wykładu.