Algorytmy biologii molekularnej
Zadania domowe, seria IV
Termin oddania: 17.05.2000

Uwaga: rozwiązanie każdego zadania proszę napisać na osobnej kartce.

Zadanie 1. (30 pkt) Niech D będzie macierzą symetryczną spełniającą warunki: $D(i,i) = 0$; $D(i,j) > 0$, dla $i \neq j$. Udowodnij, że D jest ultrametryczna $\iff$ D ma drzewo addytywne posiadające wierzchołek v równo odległy od wszystkich wyróżnionych wierzchołków.

Zadanie 2. (40 pkt)

Transpozycją (i,j,k) permutacji $\pi_1, \ldots, \pi_n$ dla $i < j < k$ nazywamy usunięcie bloku $\pi_i, \ldots, \pi_{j-1}$ i wstawienie go przed π_k. W wyniku otrzymujemy permutację $\pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_j, \pi_{j+1}, \ldots, \pi_{k-1}, \pi_i, \pi_{i+1}, \ldots, \pi_{j-1}, \pi_k, \pi_{k+1}, \ldots, \pi_n$.

(a) Do π dopiszmy $\pi_0 = 0, \pi_{n+1} = n{+}1$. Zdefiniujmy *graf przerw* $G(V, E_{red} \cup E_{blue})$ dla tej operacji jako $V = \{0, \ldots, 2n{+}1\}$, $E_{red} = \{(2i, 2i{+}1) \mid 0 \leq i \leq n\}$, $E_{blue} = \{(2\pi_i, 2\pi_{i+1} - 1) \mid 0 \leq i \leq n\}$. Wykaż, że jest to suma rozłącznych cykli.

(b) Udowodnij, że każda transpozycja zmienia co najwyżej trzy cykle.

(c) Udowodnij, że po wykonaniu transpozycji liczba cykli zmienia się o 0, $+2$ lub -2.

(d) Wykaż, że liczba cykli długości $4k + 2$, gdzie k jest liczbą naturalną, zmienia się o 0, $+2$ lub -2.

(e) Opisz permutację dla której nie istnieje transpozycja zwiększająca liczbę cykli.

Zadanie 3. (30 pkt) Mówimy, że zbiór słów F *dominuje* zbiór słów G, gdy każde słowo z G jest podsłowem pewnego słowa z F. Dwa zbiory słów F, G są *równoważne* ($F \equiv G$), gdy F dominuje G oraz G dominuje F. Łatwo jest zauważyć, że równoważne zbiory słów mają to samo najkrótsze wspólne

nadsłowo. W problemie najkrótszego wspólnego nadsłowa wygodnie jest rozważać zbiór słów, który jest *wolny od podsłów*, tzn. że żadne słowo nie jest podsłowem innego.

(a) Udowodnij następujące własności dla zbioru słów

  (i) Dwa równoważne zbiory wolne od podsłów są identyczne.

  (ii) Dla każdego skończonego zbioru słów X istnieje dokładnie jeden równoważny mu zbiór wolny od podsłów.

(b) Zaproponuj efektywny algorytm, który dla danego zbioru słów znajduje równoważny mu zbiór wolny od podsłów.