

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury Σ , Σ -algebry, Σ -homomorfizmu, kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, itp; wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Algebry “zawinięte” to algebry, gdzie każda operacja ma swoją (na ogół częściową, ale patrz wymagania poniżej) odwrotność — “zawijkę”. Dokładniej:

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, *zawinięta Σ -algebra* A składa się z

- nośnika $|A| = \langle |A|_s \rangle_{s \in S}$
- dla każdej nazwy operacji $f: s_1 \dots s_n \rightarrow s$ w Σ ,
 - funkcji całkowitej $f_A: |A|_{s_1} \times \dots \times |A|_{s_n} \rightarrow |A|_s$ oraz
 - funkcji częściowej $\widehat{f}_A: |A|_s \rightarrow |A|_{s_1} \times \dots \times |A|_{s_n}$

takich, że dla $a_1 \in |A|_{s_1}, \dots, a_n \in |A|_{s_n}$ oraz $a = f_A(a_1, \dots, a_n) \in |A|_s$, $\widehat{f}_A(a)$ jest określone i $f_A(\widehat{f}_A(a)) = a$.

Innymi słowy, zawinięta Σ -algebra A “bazuje” na standardowej Σ -algebrze, którą oznaczę przez $\mathcal{B}(A)$, dodając do niej częściowe funkcje $\widehat{f}_A$ o podanych wyżej własnościach (“zawijki”).

Zawinięta Σ -algebra A jest **t** (*totalna*), gdy dla każdego $f: s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $\widehat{f}_A$ jest funkcją całkowitą.

Dla zawiniętych Σ -algebr A i B , **s** (*słabiutki*) Σ -morphism $h: A \rightarrow B$ to funkcja $h: |A| \rightarrow |B|$ taka, że dla wszystkich $f: s_1 \dots s_n \rightarrow s$ oraz $a_1 \in |A|_{s_1}, \dots, a_n \in |A|_{s_n}$, $h_s(f_A(a_1, \dots, a_n)) = f_B(h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n))$. Zatem słabiutki Σ -morphism $h: A \rightarrow B$ to standardowy Σ -homomorphism $h: \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(B)$. Słabiutki Σ -morphism $h: A \rightarrow B$ jest **z** (*zawinięty*), gdy zachowuje “zawijki”, czyli dla $f: s_1 \dots s_n \rightarrow s$ oraz $a \in |A|_s$ jeśli $\widehat{f}_A(a)$ jest określone, to $\widehat{f}_B(h_s(a))$ jest określone i $\widehat{f}_B(h_s(a)) = \langle h_{s_1}(a_1), \dots, h_{s_n}(a_n) \rangle$, gdzie $\widehat{f}_A(a) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Jeśli dodatkowo $\widehat{f}_B(h_s(a))$ nie jest określone, gdy $\widehat{f}_A(a)$ nie jest określone, to $h: A \rightarrow B$ jest **m** (*mocno zawinięty*).

Różne kombinacje powyższych definicji określają różne kategorie zawiniętych Σ -algebr: dla $\alpha \in \{\mathbf{z}, \mathbf{t}\}$ oraz $\beta \in \{\mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{m}\}$, niech $\mathbf{Alg}_\beta^\alpha(\Sigma)$ będzie kategorią zawiniętych Σ -algebr, które są α , z β Σ -morfizmami jako morfizmami. Na przykład, $\mathbf{Alg}_\mathbf{z}^\mathbf{z}(\Sigma)$ to kategoria wszystkich zawiniętych Σ -algebr z zawiniętymi Σ -morfizmami; $\mathbf{Alg}_\mathbf{m}^\mathbf{t}(\Sigma)$ to kategoria totalnych zawiniętych Σ -algebr z mocno zawiniętymi Σ -morfizmami, itp.

Dla każdych $\alpha \in \{\mathbf{z}, \mathbf{t}\}$ oraz $\beta \in \{\mathbf{s}, \mathbf{z}, \mathbf{m}\}$ mamy oczywisty funktor $\mathcal{B}_\Sigma^{\alpha\beta}: \mathbf{Alg}_\beta^\alpha(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$, który z każdej zawiniętej Σ -algebry $A \in |\mathbf{Alg}_\beta^\alpha(\Sigma)|$ “wyciąga” jej bazę $\mathcal{B}_\Sigma^{\alpha\beta}(A) = \mathcal{B}(A) \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$ (która jest standardową Σ -algebrą), a każdemu β Σ -morfizmowi $h: A \rightarrow B$ w $\mathbf{Alg}_\beta^\alpha(\Sigma)$ przyporządkowuje ten sam Σ -homomorfizm $\mathcal{B}_\Sigma^{\alpha\beta}(h) = h: \mathcal{B}(A) \rightarrow \mathcal{B}(B)$ (którym h jest).

Zadanie:

Udowodnij odpowiedź pozytywną lub uzasadnij odpowiedź negatywną dla poniższych pytań.

1. Które z poniższych kategorii są

Z. zupełne

KZ. kozopełne

dla każdej sygnatury Σ ?

(a) $\mathbf{Alg}_s^t(\Sigma)$ (d) $\mathbf{Alg}_s^z(\Sigma)$

(b) $\mathbf{Alg}_z^t(\Sigma)$ (e) $\mathbf{Alg}_z^z(\Sigma)$

(c) $\mathbf{Alg}_m^t(\Sigma)$ (f) $\mathbf{Alg}_m^z(\Sigma)$

2. Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej sygnatury Σ ?

(a) $\mathcal{B}_\Sigma^{ts}: \mathbf{Alg}_s^t(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$ (d) $\mathcal{B}_\Sigma^{zs}: \mathbf{Alg}_s^z(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$

(b) $\mathcal{B}_\Sigma^{tz}: \mathbf{Alg}_z^t(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$ (e) $\mathcal{B}_\Sigma^{zz}: \mathbf{Alg}_z^z(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$

(c) $\mathcal{B}_\Sigma^{tm}: \mathbf{Alg}_m^t(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$ (f) $\mathcal{B}_\Sigma^{zm}: \mathbf{Alg}_m^z(\Sigma) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma)$

Uwagi:

- Można korzystać z konstrukcji i twierdzeń z wykładu bez powtarzania ich dowodów. Warto pewno sobie przypomnieć (a może i spojrzeć na dowód), że dla dowolnej sygnatury Σ , zbioru Σ -różności Φ i inkluzji sygnatur $\Sigma' \subseteq \Sigma$, kategoria $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ jest zupełna i kozopełna, a funktor reduktu $_|_{\Sigma'}: \mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi) \rightarrow \mathbf{Alg}(\Sigma')$ ma lewy sprzężony (gdzie $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ to kategoria wszystkich Σ -algebr spełniających wszystkie równości Φ). Warto też pamiętać, że kategorie równoważne mają te same kateryjne własności.
- Na pierwszy rzut oka mamy tu 18 problemów. Proszę rozwiązać tyle z nich, ile kto da radę. Na przykład, poprawne odpowiedzi na **1.{Z,KZ}.{a,b,c}** i **2.{a,b,c}** — to tylko połowa, chyba łatwiejsza — zapewnią co najmniej pozytywną ocenę.

Co więcej, argumenty i konstrukcje w dowodach pozytywnych odpowiedzi oraz kontrprzykłady uzasadniające odpowiedzi negatywne mogą mieć zastosowania do kilku pokrewnych pytań, albo wprost implikować odpowiedzi na pokrewne pytania. Nie trzeba ich wówczas powtarzać, wystarczy wskazać odpowiednie zależności. Tak naprawdę zatem jest tu mniej pytań niż może się wydawać.

- Zapewne najtrudniejsze (i najciekawsze) mogą się okazać pytania **1.KZ.e** i **2.e**. Może tam być niezbędne wypracowanie odpowiednich pojęć i konstrukcji dla algebr częściowych, o których co najwyżej wspominałem na wykładzie. Proponuję zostawić je sobie na koniec — na mocny plus do piątki!