Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2017/18

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu, stosując notacje z wykładu.

Poziomowana sygnatura $\Delta = \langle \Sigma, n, p \rangle$ składa się ze zwykłej sygnatury algebraicznej $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ oraz liczby naturalnej k (*liczba poziomów*) i funkcji p, która każdej nazwie operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω przypisuje liczbę $0 \le p(f) < k$ (*ograniczenie podniesienia*).

Poziomowana Δ-algebra A składa się z S-rodzajowego nośnika $|A| = \langle |A|_s \rangle_{s \in S}$ oraz dla każdej nazwy operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, funkcji $f_A: |A|_{s_1} \times \cdots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$, przy czym nośnik $|A|_s$ rodzaju $s \in S$ jest podzielony na rozłączne warstwy $|A|_s^1, \ldots, |A|_s^k$ — przyjmujemy notację $|A|_s^{\le j} = \bigcup_{i=1}^{j} |A|_s^i$; stąd $|A|_s^{\le k} = |A|_s$ — oraz dla $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ i $a_1 \in |A|_{s_1}^{j_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_1}^{j_n}$, $f_A(a_1, \ldots, a_n) \in |A|_s^{\le m(j_1, \ldots, j_n, p(f))}$, gdzie $m(j_1, \ldots, j_n, p(f)) = min(\{max(\{1, j_1, \ldots, j_n\}) + p(f), k\})$.

Poziomowany Δ-homomorfizm $h: A \to B$ między poziomowanymi Δ-algebrami A, B, to taki Σ-homomorfizm $h: A \to B$, że dla $s \in S$, $j = 1, \ldots, k$ oraz $a \in |A|_s^j$, $h_s(a) \in |B|_s^{\le j}$; taki homomorfizm h jest *ściśle poziomowany* jeśli dla $s \in S$, $j = 1, \ldots, k$ oraz $a \in |A|_s^j$, $h_s(a) \in |B|_s^j$.

Zwykłe pojęcia zdefiniowane na wykładzie dla sygnatur Σ i Σ-algebr A (np. termy $t \in |T_\Sigma(X)|_s$, wartość $t_A[v]$ termu t w algebrze $|A|$ przy danym wartościowaniu $v: X \to |A|$, równości $\forall X.t = t'$, itp) przenoszą się na sygnatury i algebry poziomowane w oczywisty sposób.

Definiujemy Δ-*zdania* następujących postaci, definiując też ich *spełnianie* w Δ-algebrach A:

- $EQ(\Delta)$: zbiór Δ-*równości* $\forall X.t = t'$; $A \models \forall X.t = t'$ gdy dla każdego $v: X \to |A|$, $t_A[v] = t'_A[v]$,
- $POZ(\Delta)$: zbiór *określeń* Δ-*poziomu* $\forall X.\underline{j}(t)$, gdzie $1 \le j \le k$, X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, a $t \in |T_\Sigma(X)|_s$ jest Δ-termem; $A \models \forall X.\underline{j}(t)$ gdy dla każdego wartościowania $v: X \to |A|$, $t_A[v] \in |A|_s^j$,
- $POZ^{\le}(\Delta)$: zbiór *ograniczeń* Δ-*poziomu* $\forall X.\underline{{}^{\le}j}(t)$, gdzie $1 \le j \le k$, X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, a $t \in |T_\Sigma(X)|_s$ jest Δ-termem; $A \models \forall X.\underline{{}^{\le}j}(t)$ gdy dla każdego wartościowania $v: X \to |A|$, $t_A[v] \in |A|_s^{\le j}$.

Dla poziomowanej sygnatury $\Delta = \langle \Sigma, k, p \rangle$ i zbioru $\Phi \subseteq EQ(\Delta) \cup POZ(\Delta) \cup POZ^{\le}(\Delta)$ Δ-zdań, definiujemy następujące kategorie i oczywiste funktory zapominające:

- $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi)$: kategoria poziomowanych Δ-algebr spełniających każde ze zdań w Φ i poziomowanych Δ-homomorfizmów między nimi;
- $\mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi)$: kategoria poziomowanych Δ-algebr spełniających każde ze zdań w Φ i ściśle poziomowanych Δ-homomorfizmów między nimi;
- $\mathcal{U}_{\Delta,\Phi}: \mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
- $\mathcal{U}^{S}_{\Delta,\Phi}: \mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$

W powyższych oznaczeniach pomijamy Φ, gdy $\Phi = \emptyset$.

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii mają*
   P. *produkty każdej rodziny obiektów (w szczególności, obiekty końcowe)*
   E. *equalizatory każdej pary równoległych morfizmów*
   KP. *koprodukty każdej rodziny obiektów (w szczególności, obiekty początkowe)*
   KE. *koequalizatory każdej pary równoległych morfizmów*
   dla każdej poziomowanej sygnatury Δ i, gdzie stosowne, zbioru Δ-równości $\Phi \subseteq EQ(\Delta)$, ograniczeń Δ-poziomów $\Phi' \subseteq POZ^{\leq}(\Delta)$ i określeń Δ-poziomów $\Phi'' \subseteq POZ(\Delta)$? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   (a) $\mathbf{PozAlg}(\Delta)$
   (b) $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi')$
   (c) $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi' \cup \Phi'')$
   (d) $\mathbf{SPozAlg}(\Delta)$
   (e) $\mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi')$
   (f) $\mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi' \cup \Phi'')$
2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej poziomowanej sygnatury Σ oraz, gdzie stosowne, zbioru Δ-równości $\Phi \subseteq EQ(\Delta)$, ograniczeń Δ-poziomów $\Phi' \subseteq POZ^{\leq}(\Delta)$ i określeń Δ-poziomów $\Phi'' \subseteq POZ(\Delta)$? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathcal{U}_{\Delta}\colon \mathbf{PozAlg}(\Delta) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
   (b) $\mathcal{U}_{\Delta,\Phi\cup\Phi'}\colon \mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi') \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
   (c) $\mathcal{U}_{\Delta,\Phi\cup\Phi'\cup\Phi''}\colon \mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi' \cup \Phi'') \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
   (d) $\mathcal{U}^{\mathcal{S}}_{\Delta}\colon \mathbf{SPozAlg}(\Delta) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
   (e) $\mathcal{U}^{\mathcal{S}}_{\Delta,\Phi\cup\Phi'}\colon \mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi') \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$
   (f) $\mathcal{U}^{\mathcal{S}}_{\Delta,\Phi\cup\Phi'\cup\Phi''}\colon \mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi' \cup \Phi'') \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób są powiązane zadania 1.P.a i 1.P.b: dowód istnienia produktów w każdej kategorii $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi')$ pokazywałby też istnienie produktów w $\mathbf{PozAlg}(\Delta)$, a kontrprzykład na istnienie produktów w kategorii $\mathbf{PozAlg}(\Delta)$ byłby też kontrprzykładem na ich istnienie w $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Phi \cup \Phi')$. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Z drugiej strony, taka konstrukcja zadania niekiedy umożliwia odpowiedź na pytanie łatwiejsze (np. 1.P.a), bez odpowiadania na pytanie potencjalnie trudniejsze (np. 1.P.b). Można przyjąć, że odpowiedzi na pytania dotyczące kategorii wyznaczonych przez sygnatury (bez zbiorów równości) wystarczą na ocenę pozytywną.

Szkic możliwych rozwiązań:

Na początek prosta odpowiedź pozytywna:

Rozważmy dowolną poziomowaną sygnaturę Δ i zbiór zdań $\Psi \subseteq EQ(\Delta) \cup POZ(\Delta) \cup POZ^{\leq}(\Delta)$, oraz poziomowane Δ-algebry $A, B \in |\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)|$ i poziomowane Δ-homomorfizmy $g, h \colon A \to B$. Niech E będzie poziomowaną Δ-podalgebrą algebry A zbudowaną w oczywisty sposób na nośniku $|E|_s = \{a \in |A|_s \mid g_s(a) = h_s(a)\}$ (z operacjami i warstwami zdefiniowanymi przez obcięcie ich odpowiedników w A). Wówczas inkluzja z E do A jest equalizatorem h i h' zarówno w $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \Psi)$, jak i dla ściśle poziomowanych h i h', w $\mathbf{SPozAlg}(\Delta, \Psi)$. Stąd:
1.{E}.{a,b,c,d,e,f}: TAK

Dalej kilka prostych odpowiedzi negatywnych:

Rozważmy poziomowaną sygnature Δ_c z jedną stałą $c\colon s$ i dwoma poziomami, poziomowaną Δ_c-agebrę A z $c_A \in |A|^1_s$ oraz poziomowaną Δ_c-algebrę B z $c_B \in |B|^2_s$. Nie istnieje poziomowana Δ_c-algebra C taka, że istnieją ściśle poziomowane Δ_c-homomorfizmy $h_A \colon C \to A$ i $h_B \colon C \to B$, ani poziomowana Δ_c-algebra D taka, że istnieją ściśle poziomowane Δ_c-homomorfizmy $h_A \colon A \to D$ i $h_B \colon B \to D$. To daje natychmiast:
1.{P,KP}.{d,e,f}: NIE
Ponadto, ponieważ z powyższego wynika nieistnienie w $\mathbf{SPozAlg}(\Delta)$ początkowej poziomowanej Δ_c-algebry, dostajemy też:
2.{d,e,f}: NIE

Następny kontrprzykład: rozpatrzmy dwupoziomową sygmaturę poziomowaną Δ_f z dwoma rodzajami s, s' i binarną operacją $f \colon s \times s' \to s$ z ograniczeniem podniesienia 1. Niech A będzie poziomowaną Δ-algebrą z $|A|_s = \emptyset$ i $|A|_{s'} = |A|^1_{s'} = \{a\}$. Niech dalej B będzie poziomowaną Δ-algebrą z $|B|^1_s = \{x\}$, $|B|^2_s = \{y\}$, $|B|_{s'} = |B|^1_{s'} = \{b_1, b_2\}$, $f_B(x, b_1) = x$, $f_B(x, b_2) = f_B(y, b_1) = f_B(y, b_2) = y$. Niech $h, h' \colon A \to B$ będą Δ-homomorfizmami takimi, że $h_{s'}(a) = b_1$ i $h_{s'}(a) = b_2$. Dla dowolnego poziomowanego Δ-homomorfizmu $g \colon B \to C$, jeśli $h;g = h';g$ to $g_{s'}(b_1) = g_{s'}(b_2)$, więc także $g_s(x) = g_s(f_B(x, b_1)) = g_s(f_B(x, b_2)) = g_s(y)$; co pokazuje, że g nie jest ściśle poziomowany. Zatem:
1.{KE}.{d,e,f}: NIE

Jeszcze dwie łatwe odpowiedzi negatywne: nie istnieje poziomowana Δ_c-algebra spełniająca jednocześnie $\forall\emptyset.\underline{1}(c)$ i $\forall\emptyset.\underline{2}(c)$, zatem kategoria $\mathbf{PozAlg}(\Delta_c, \{\forall\emptyset.\underline{1}(c), \forall\emptyset.\underline{2}(c)\})$ jest pusta, co daje:
1.{P,KP}.c, 2.c: NIE

Rozpatrzmy poziomowaną dwupoziomową sygnaturę $\Delta_{a,b}$, z jednym rodzajem s i dwoma stałymi $a, b \colon s$. Niech A, B będą poziomowanymi $\Delta_{a,b}$-algebrami takimi, że $|A|^1_s = \{a_A\}$ i $|A|^2_s = \{b_A, x\}$ oraz $|B|^1_s = \{a_B\}$ i $|B|^2_s = \{b_B\}$. Niech $h, h' \colon A \to B$, gdzie $h_s(a_A) = h'_s(a_A) = h_s(x) = a_B$ i $h_s(b_A) = h'_s(b_A) = h'_s(x) = b_B$. Dla dowolnego poziomowanego $\Delta_{a,b}$-homomorfizmu $g \colon B \to C$, jeśli $h;g = h';g$ to $a_C = g_s(a_B) = g_s(b_B) = b_C$. Stąd wniosek, że nie istnieje koequalizator h i h' w $\mathbf{PozAlg}(\Delta, \{\forall\emptyset.\underline{1}(a), \forall\emptyset.\underline{2}(b)\})$, co daje:
1.{KE}.c: NIE

Na koniec znów wyniki pozytywne: dla dowolnej poziomowanej sygnatury $\Delta = \langle\langle S, \Omega\rangle, k, p\rangle$ zdefiniujmy sygnaturę pierwszego rzędu (sygnaturę algebraiczną z predykatami) $\Pi(\Delta) = \langle S, \Omega, P\rangle$, przez dodanie zbioru nazw predykatów P zawierającego unarne predykaty $\underline{\leq j} \colon s$ dla wszystkich $s \in S$ oraz $j = 1, \ldots, k$. Niech dalej Φ_Δ będzie zbiorem następujących $\Pi(\Delta)$-zdań:

- $\forall x{:}s. \left(\underline{\leq j}(x) \Longrightarrow \underline{\leq (j+1)}(x)\right)$ dla $s \in S$, $j = 1, \ldots, k-1$

- $\forall x{:}s.\underline{{}^{\leq}k}(x)$
- $\forall x_1{:}s_1,\ldots,x_n{:}s_n.\Big((\underline{{}^{\leq}j_1}(x_1)\wedge\ldots\wedge\underline{{}^{\leq}j_n}(x_n))\Longrightarrow\underline{{}^{\leq}m(j_1,\ldots,j_n,p(f))}(f(x_1,\ldots,x_n))\Big)$ dla każdej nazwy operacji $f\colon s_1\times\ldots\times s_n\to s$ oraz $j_1,\ldots,j_n=1,\ldots,k$.

Dla dowolnego zbioru Δ-zdań $\Phi\subseteq EQ(\Delta)\cup POZ^{\leq}(\Delta)$, kategoria $\mathbf{PozAlg}(\Delta,\Phi)$ jest równoważna kategorii $\Pi(\Delta)$-struktur pierwszego rzędu spełniających $\Phi\cup\Phi_\Delta$. Wiadomo, że ta ostatnia kategoria jest zupełna i kozupełna, a funktor zapominający względem zanurzenia sygnatury algebraicznej (bez predykatów) $\langle S,\Omega\rangle$ w $\Pi(\Delta)$ ma lewy sprzężony — to pokazuje:
1.{P,E,KP,KE}.{a,b}, 2.{a,b}: TAK

$\square$