Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2016/17

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Rozważmy dowolną sygnaturę $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$.
Uporządkowana Σ-algebra to dowolna Σ-algebra A, w której dodatkowo dla każdego rodzaju $s \in S$, nośnik rodzaju s jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq^s_A$ — tzn. w algebrze A dla każdego $s \in S$ mamy zwrotną, przechodnią i antysymetryczną relację $\leq^s_A \subseteq |A|_s \times |A|_s$ (jak zwykle, s możemy pomijać, gdy nie zachodzi obawa nieporozumienia).

Kresowa Σ-algebra to taka uporządkowana Σ-algebra, że dla każdego rodzaju $s \in S$, dla wszystkich $a, b \in |A|_s$, w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle |A|_s, \leq^s_A \rangle$ istnieje *kres górny* $a \sqcup^s_A b$ i *kres dolny* $a \sqcap^s_A b$ zbioru $\{a, b\}$ (jak zwykle, dekoracje s i A możemy pomijać, gdy nie zachodzi obawa nieporozumienia).

Dla dowolnych uporządkowanych Σ-algebr A, B, *uporządkowany Σ-homomorfizm* $h: A \to B$ to taki homomorfizm Σ-algebr $h: A \to B$, że dla każdego $s \in S$, funkcja $h_s: |A|_s \to |B|_s$ zachowuje porządek: dla $a, b \in |A|_s$, jeśli $a \leq^s_A b$ to $h_s(a) \leq^s_B h_s(b)$.

Dla dowolnych kresowych Σ-algebr A, B, *kresowy Σ-homomorfizm* $h: A \to B$ to taki uporządkowany Σ-homomorfizm $h: A \to B$, że dla każdego $s \in S$, funkcja $h_s: |A|_s \to |B|_s$ zachowuje kresy górne i dolne każdej pary elementów: dla każdych $a, b \in |A|_s$ $h_s(a \sqcup^s_A b) = h_s(a) \sqcup^s_B h_s(b)$ oraz $h_s(a \sqcap^s_A b) = h_s(a) \sqcap^s_B h_s(b)$.

Rozważamy Σ-*nierówności* postaci $\forall X \cdot t \leq t'$, gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, a $t, t' \in |T_\Sigma(X)|_s$ są dowolnymi Σ-termami o wspólnym rodzaju. Uporządkowana Σ-algebra A *spełnia* Σ-nierówność $\forall X \cdot t \leq t'$, $A \models \forall X \cdot t \leq t'$, gdy dla każdego wartościowania $v: X \to |A|$ zachodzi $(t)_A[v] \leq_A (t')_A[v]$, gdzie jak zwykle $t_A[v]$ to wartość termu t w algebrze A przy wartościowaniu zmiennych v, i podobnie dla $t'_A[v]$.

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ i zbioru Σ-nierówności Φ, w oczywisty sposób są zdefiniowane następujące kategorie i funktory:

- $\mathbf{Set}^S$ — kategoria S-rodzajowych zbiorów i funkcji między nimi;
- $\mathbf{POSet}^S$ — kategoria S-rodzajowych zbiorów uporządkowanych, z funkcjami monotonicznymi między nimi;
- $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria tych kresowych Σ-algebr, które spełniają wszystkie nierówności w zbiorze Φ, i uporządkowanych Σ-homomorfizmów między nimi;
- $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria tych kresowych Σ-algebr, które spełniają wszystkie nierówności w zbiorze Φ, i kresowych Σ-homomorfizmów między nimi;
- $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry i uporządkowaniu nośników, $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = |A|$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry i uporządkowaniu nośników, $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}(A) = |A|$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry, $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = \langle |A|_s, \leq^s_A \rangle_{s \in S}$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry, $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}(A) = \langle |A|_s, \leq^s_A \rangle_{s \in S}$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów.

We wprowadzonych wyżej oznaczeniach można pominąć Φ, gdy $\Phi = \emptyset$.

Zadanie:

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-nierówności Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

Zadanie KUP:

1. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
2. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
3. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
4. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
5. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
6. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.

Zadanie KKUP:

1. Kategoria $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
2. Kategoria $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
3. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma}\colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
4. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
5. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma}\colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
6. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.

UWAGA:

Odpowiedzi na poszczególne części zadań nie są niezależne (np. dowód dla **KUP**.2.a implikowałby pozytywną odpowiedź na **KUP**.1.a, a kontrprzykład dla **KUP**.1.b byłby też kontrprzykładem dla **KUP**.2.b; są też mniej oczywiste zależności). Można to wykorzystać dla skrócenia rozwiązań. Zadnia są więc krótsze niż to się na pozór wydaje. Można też bez dowodów odwoływać się do dowolnych faktów podawanych na wykładzie.

. . . .

Poniżej pytania z odpowiedziami i **szkicem** dowodów. Pomijam indeksowanie nazwami rodzajów (składowych) nośników, funkcji, relacji, itp.

Zadanie KUP:

1. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   NIE. Na przyład, nie zawsze istnieją ekwalizatory. Rozważmy sygnaturę z jednym rodzajem, bez operacji. Niech A będzie kresową algebrą z elementami a, b, c, d, gdzie $c = a \sqcup_A b$ i $d = a \sqcap_A b$, B kresową algebrą z elementami a, b, c, d, c', d', gdzie $c = a \sqcup_B b$, $d = a \sqcap_B b$, $c' = c' \sqcup_B c$, $d' = d' \sqcap_B d$. Niech dalej $h\colon A \to B$ będzie inkluzją, a $h'\colon A \to B$ będzie $h'(a) = a, h'(b) = b, h'(c) = c', h'(d) = d'$. Łatwo sprawdzić, że w $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ nie istnieje ekwalizator dla h i h'.

(b) kozupełna.
NIE. Na przykład, przyjmując sygnaturę z jednym rodzajem, bez operacji, łatwo sprawdzić, że w $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ nie istnieje koprodukt dwóch algebr jednoelementowych.

2. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   NIE: z KUP.1.a.
   (b) kozupełna.
   NIE: z KUP.1.b.
3. Funktor $\mathbf{P}_{\Sigma}^{\mathbf{KUP}} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE. Na przykład, przyjmując sygnaturę z jednym rodzajem, bez operacji, łatwo sprawdzić, że w $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ nie istnieje obiekt wolny względem $\mathbf{P}_{\Sigma}^{\mathbf{KUP}}$ nad zbiorem dwuelementowym.
4. Funktor $\mathbf{P}_{\Sigma,\Phi}^{\mathbf{KUP}} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE: z KUP.3.
5. Funktor $\mathbf{G}_{\Sigma}^{\mathbf{KUP}} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE: podobnie jak w KUP.3.
6. Funktor $\mathbf{G}_{\Sigma,\Phi}^{\mathbf{KUP}} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE: z KUP.5.

Zadanie KKUP:

1. Kategoria $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
2. Kategoria $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
3. Funktor $\mathbf{P}_{\Sigma}^{\mathbf{KK}} \colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
4. Funktor $\mathbf{P}_{\Sigma,\Phi}^{\mathbf{KK}} \colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
5. Funktor $\mathbf{G}_{\Sigma}^{\mathbf{KK}} \colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
6. Funktor $\mathbf{G}_{\Sigma,\Phi}^{\mathbf{KK}} \colon \mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.

TAK, na wszystkie powyższe pytania.

Najpierw zauważmy, że kategoria $\mathbf{KKUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest równoważna kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma^K, \Psi^K \cup \Phi^K)$, gdzie:

- Σ^K rozszerza Σ o operacje $sup_s, inf_s \colon s \times s \to s$, dla każdego rodzaju s w Σ;
- Ψ^K dla każdego rodzaju s w Σ zawiera równości (pomijam oczywistą kwatyfikację zmiennych):

$$\begin{array}{ccc} sup_s(x,y) = sup_s(y,x) & sup_s(sup_s(x,y),z) = sup_s(x, sup_s(y,z)) & sup_s(inf_s(x,y),y) = y \\ inf_s(x,y) = inf_s(y,x) & inf_s(inf_s(x,y),z) = inf_s(x, inf_s(y,z)) & inf_s(x, sup_s(x,y)) = x \end{array}$$

- dla każdej nierównosci $\forall X \cdot t \leq t'$, $(\forall X \cdot t \leq t')^K$ to równość $\forall X \cdot sup(t,t') = t'$.

(patrz np. H. Rasiowa, "Wstęp do matematyki współczesnej", chap XIV, par. 7, (IV))

Reszta rozwiązania to proste technikalia, by sprowadzić pytania z treści zadania to znanych wyników dla klas algebr definiowalnych równościowo.