Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2015/16

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, domyślnie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, i Σ-algebry A, domyślnie przyjmując oznaczenia $|A| = \langle |A|_s \rangle_{s \in S}$ oraz, dla każdej nazwy operacji $f \colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, $f_A \colon |A|_{s_1} \times \cdots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$ dla, odpowiednio, nośnika i operacji o nazwie f w Σ-algebrze A.

Kluczykami dla Σ-algebry A nazywamy dowolną rodzinę $\mathbf{k} = \langle \mathbf{k}_s \in |A|_s \rangle_{s \in S}$ elementów nośnika A, po jednym każdego rodzaju. Operacja $f \colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ jest *zamknięta* przez kluczyki $\mathbf{k}$ w algebrze A gdy $f_A(\mathbf{k}_{s_1}, \ldots, \mathbf{k}_{s_n}) = \mathbf{k}_s$. *Kluczykowa* Σ-*algebra* to para $\langle A, \mathbf{k} \rangle$, gdzie A to Σ-algebra, $\mathbf{k}$ to kluczyki dla A takie, że każda operacja w A, która jest zamknięta przez kluczyki $\mathbf{k}$, jest stała (tzn. daje ten sam wynik dla wszystkich argumentów).

Niech $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ oznacza kategorię kluczykowych Σ-algebr ze zwyklymi Σ-homomorfizmami między algebrami (homomorfizmy te nie muszą zachowywać kluczyków).

Dla kluczykowych Σ-algebr $\langle A, \mathbf{k} \rangle$, $\langle B, \mathbf{g} \rangle$, *kluczykowy* Σ-*homomorfizm* $h \colon \langle A, \mathbf{k} \rangle \to \langle B, \mathbf{g} \rangle$ to Σ-homomorfizm $h \colon A \to B$, który zachowuje kluczyki, tzn. $h_s(\mathbf{k}_s) = \mathbf{g}_s$ dla $s \in S$. Niech $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ oznacza kategorię kluczykowych Σ-algebr z kluczykowymi Σ-homomorfizmami między nimi.

Dla dowolnego zbioru Σ-równości Φ, $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ i $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ to pełne podkategorie kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ i $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$, odpowiednio, wyznaczone przez algebry spełniające Φ.

Dla dowolnej sygnatury Σ i zbioru Σ-równości Φ, mamy funktory inkluzji $\mathcal{J}_\Sigma \colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$ oraz $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Dla dowolnego morfizmu sygnatur $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma'$, definiujemy funktor zapominający $\mathcal{U}_\sigma \colon \mathbf{KAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$, gdzie dla $\langle A', \mathbf{k}' \rangle \in |\mathbf{KAlg}(\Sigma')|$, $\mathcal{U}_\sigma(\langle A', \mathbf{k}' \rangle) = \langle A'|_\sigma, \mathbf{k}'|_\sigma \rangle$, $|A'|_\sigma|_s = |A'|_{\sigma(s)}$ dla $s \in S$, $f_{A'|_\sigma} = (\sigma(f))_{A'}$ dla operacji f w Σ, $(\mathbf{k}'|_\sigma)_s = \mathbf{k}'_{\sigma(s)}$ dla $s \in S$, przy oczywistym rozszerzeniu tych definicji na homomorfizmy. Dalej, zauważmy, że $\mathcal{U}_\sigma$ przekształca kluczykowe Σ'-homomorfizmy na kluczykowe Σ-homomorfizmy; niech $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_\sigma \colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ będzie ograniczeniem $\mathcal{U}_\sigma$ do podkategorii $\mathbf{KKAlg}(\Sigma')$. W końcu, dla zbioru Σ'-równości Φ', niech $\mathcal{U}_{\sigma,\Phi'} \colon \mathbf{KAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$ i $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi'} \colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$ będą ograniczeniami tych funktorów do podkategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma', \Phi')$ i $\mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi')$, odpowiednio.

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii mają*
   P. *produkty każdej rodziny obiektów (w szczególności, obiekty końcowe)*
   E. *equalizatory każdej pary równoległych morfizmów*
   KP. *koprodukty każdej rodziny obiektów (w szczególności, obiekty początkowe)*
   KE. *koequalizatory każdej pary równoległych morfizmów*
   dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-równości Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   (a) $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$
   (b) $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$
   (c) $\mathbf{KKAlg}(\Sigma)$
   (d) $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$
2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej sygnatury Σ oraz, gdzie stosowne, dla każdego morfizmu sygnatur $\sigma: \Sigma \to \Sigma'$ i zbioru Σ'-równości Φ'? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathcal{U}_\sigma: \mathbf{KAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$
   (b) $\mathcal{U}_{\sigma,\Phi}: \mathbf{KAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$
   (c) $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_\sigma: \mathbf{KKAlg}(\Sigma') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$
   (d) $\mathcal{U}^{\mathcal{K}}_{\sigma,\Phi}: \mathbf{KKAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{KKAlg}(\Sigma)$
   (e) $\mathcal{J}_\Sigma: \mathbf{KKAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma)$
   (f) $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób są powiązane zadania 1.P.a i 1.P.b: dowód istnienia produktów w każdej kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$ pokazywałby też istnienie produktów w $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$, a kontrprzykład na istnienie produktów w kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma)$ byłby też kontrprzykładem na ich istnienie w $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Z drugiej strony, taka konstrukcja zadania niekiedy umożliwia odpowiedź na pytanie łatwiejsze (np. 1.P.a), bez odpowiadania na pytanie potencjalnie trudniejsze (np. 1.P.b). Można przyjąć, że odpowiedzi na pytania dotyczące kategorii wyznaczonych przez sygnatury (bez zbiorów równości) wystarczą na ocenę pozytywną.

Szkic jednego z możliwych rozwiązań:

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ rozważmy sygnaturę $\mathcal{K}(\Sigma) = \langle S, \Omega \uplus \{k_s: s\}_{s \in S} \rangle$, otrzymaną z Σ przez dodanie nowej stałej $k_s: s$ dla każdego $s \in S$. Niech dalej $\Psi^{\mathcal{K}}_\Sigma$ będzie zbiorem wszystkich równości warunkowych postaci

$$\forall \{x_1: s_1, \ldots, x_n: s_n\}. f(k_{s_1}, \ldots, k_{s_n}) = k_s \Longrightarrow f(x_1, \ldots, x_n) = k_s$$

dla wszystkich nazw operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Σ. Kategoria $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest równoważna (nawet izomorficzna) z $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi \cup \Psi^{\mathcal{K}}_\Sigma)$. Wraz z odpowiednimi wynikami dla quasi-rozmaitości (kategorii zwykłych algebr definiowalnych równościami warunkowymi) daje to natychmiast:
1.{P,E,KP,KE}.{c,d}: TAK oraz **2.{c,d}: TAK**.

1.P.b: TAK. Działa zwykła konstrukcja produktu algebr, z "produktowymi" kluczykami. To daje też **1.P.a: TAK**.

1.E.a: NIE: Niech $\Sigma_1 = \langle\{*\}, \emptyset\rangle$ będzie jednorodzajową sygnaturą, bez operacji. Zauważmy, że dla dowolnych kluczykowych Σ_1-algebr, każda funkcja między ich nośnikami jest morfizmem w $\mathbf{KAlg}(\Sigma_1)$. Rozpatrzmy dwie wszędzie różne funkcje (tzn. takie, które dla każdego argumentu dają różne wyniki). W $\mathbf{KAlg}(\Sigma_1)$ nie istnieje ich equalizator, bo jego źródło musiałoby (zawierać kluczyk, zatem) mieć niepusty nośnik — więc morfizm z tego źródła nie wyrównywałby rozważanych funkcji.

Z powyższego także **1.E.b: NIE**.

1.KP.a: NIE: Rozpatrzmy dowolną Σ_1-algebrę kluczykową $\langle A, \mathbf{k}\rangle$ w $\mathbf{KAlg}(\Sigma_1)$ (Σ_1 jak wyżej). Wówczas $\mathbf{k}_* \in |A|_* \neq \emptyset$ i dla dowolnej kluczykowej Σ_1-algebry $\langle B, \mathbf{g}\rangle$ takiej, że nośnik $|B|_*$ jest przynajmniej dwuelementowy, mamy przynajmniej dwa różne morfizmy z $\langle A, \mathbf{k}\rangle$ do $\langle B, \mathbf{g}\rangle$. Zatem w $\mathbf{KAlg}(\Sigma_1)$ nie istnieje algebra początkowa.

Z powyższego także **1.KP.b: NIE**.

1.KE.a: NIE. Niech $\Sigma_2 = \langle\{*\}, \{f, g \colon * \to *\}\rangle$ będzie jednorodzajową sygnaturą, z dwiema operacjami jednoargumentowymi. Niech A będzie Σ_2-algebrą o nośniku

$$|A|_* = \{x_0, x_{1,0}, x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, y_0, y_{1,0}, y_{1,1}, y_{1,2}, \ldots\}$$

z operacjami $f_A(x_0) = f_A(y_0) = f_A(y_{1,i}) = x_0$, $f_A(x_{1,i}) = x_{1,i+1}$, $g_A(y_0) = g_A(x_0) = g_A(x_{1,i}) = y_0$, $g_A(y_{1,i}) = y_{1,i+1}$, dla $i \geq 0$. Rozpatrujemy Σ_2-algebrę kluczykową $\langle A, \mathbf{k}\rangle$ z $\mathbf{k}_* = x_{1,0}$.

Niech $h \colon A \to A$ bedzie Σ_2-homomorfizmem danym przez $h(x_0) = x_0$, $h(y_0) = y_0$, $h(x_{1,i}) = x_{1,i+1}$, $h(y_{1,i}) = y_{1,i+1}$, dla $i \geq 0$. Przypuśćmy, że w $\mathbf{KAlg}(\Sigma_2)$ istnieje koequalizator $c \colon \langle A, \mathbf{k}\rangle \to \langle B, \mathbf{g}\rangle$ dla $id, h \colon \langle A, \mathbf{k}\rangle \to \langle a, \mathbf{k}\rangle$. Zauważmy, że wtedy $c \colon A \to B$ jest surjektywny oraz $c(x_{1,i}) = c(x_{1,0})$ i $c(y_{1,i}) = c(y_{1,0})$ dla $i \geq 0$. Zatem nośnik $|C|$ składa się z (niekoniecznie różnych) elementów $c(x_0), c(x_{1,0}), c(y_0), c(y_{1,0})$, przy czym $f_B(c(x_0)) = f_B(c(y_0)) = f_B(c(y_{1,0})) = c(x_0)$, ale $f_B(c(x_{1,0})) = c(x_{1,0})$ oraz $g_B(c(y_0)) = g_B(c(x_0)) = g_B(c(x_{1,0})) = c(y_0)$, ale $g_B(c(y_{1,0})) = c(y_{1,0})$.

Rozpatrzmy dalej dwie Σ_2-algebry, A_x, A_y, gdzie

$$|A_x|_* = \{x, y_0, y_1\} \qquad |A_y|_* = \{x_0, x_1, y\}$$

$f_{A_x}(x) = f_{A_x}(y_0) = f_{A_x}(y_1) = x$, $g_{A_x}(x) = g_{A_x}(y_0) = y_0$, $g_{A_x}(y_1) = y_1$, oraz $f_{A_y}(y) = f_{A_y}(x_0) = f_{A_y}(x_1) = y$, $g_{A_y}(y) = g_{A_y}(x_0) = x_0$, $g_{A_y}(x_1) = x_1$. $\langle A_x, \mathbf{k}^x\rangle$, gdzie $\mathbf{k}^x_* = x$, oraz $\langle A_y, \mathbf{k}^y\rangle$, gdzie $\mathbf{k}^y_* = y$, są algebrami kluczykowymi. Co więcej, mamy Σ_2-homomorfizmy $h_x \colon A \to A_x$ oraz $h_y \colon A \to A_x$ takie, że $h_x(x_0) = h_x(x_{1,i}) = x$, $h_x(y_0) = y_0$ i $h_x(y_{1,i}) = y_1$ oraz $h_y(y_0) = h_y(y_{1,i}) = y$, $h_y(x_0) = x_0$ i $h_y(x_{1,i}) = x_1$ dla $i \geq 0$, które spełniają $id;h_x = h;h_x$ oraz $id;h_y = h;h_y$. Istnieją (jedyne) Σ_2-homomorfizmy $c_x \colon B \to A_x$ oraz $c_y \colon B \to A_y$ takie, że $c;c_x = h_x$ oraz $c;c_y = h_y$. Zatem w B wszystkie cztery elementy $c(x_0), c(x_{1,0}), c(y_0), c(y_{1,0})$ sa wzajemnie różne. Łatwo sprawdzić, ze w $|B|$ nie istnieje kluczyk, przy którym B staje się algebrą kluczykową — sprzeczność, co kończy kontrprzykład dla **1.KE.a**.

Dalej, niech $\Sigma_\emptyset$ bedzie pustą sygnaturą; rozpatrzmy (jedyny) morfizm sygnatur $\iota \colon \Sigma_\emptyset \to \Sigma_1$ (Σ_1 jak wyżej). Kategoria $\mathbf{KAlg}(\Sigma_\emptyset)$ jest kategorią końcową (z jednym obiektem i jednym morfizmem), zatem ma obiekt początkowy. Gdyby $\mathcal{U}_\iota$ miał lewy sprzężony, to także w kategorii $\mathbf{KAlg}(\Sigma_1)$ istniałby obiekt początkowy — sprzeczność z kontrprzykładem dla 1.KP.a. Stąd: **2.a: NIE**, a z tego też **2.b: NIE**.

2.f: TAK: Niech $\langle A, \mathbf{k}\rangle$ będzie kluczykową Σ-algebrą spełniająca równości Φ. Niech $\mathbf{g} = \langle\{\star\}\rangle_{s \in S}$ będzie S-rodzajową rodziną zbiorów jednoelementowych, a $F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g})$ algebrą wolną w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ z generatorami $\mathbf{g}$. Niech $A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g})$ będzie koproduktem algebr w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ z włożeniami $\eta_A \colon A \to (A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g}))$ oraz $\iota \colon F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g}) \to (A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g}))$.

Wówczas $\langle A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g}), \iota(\mathbf{g})\rangle$ z jednością $\eta_A \colon A \to (A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g}))$ jest obiektem wolnym nad A względem $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$. Niech bowiem $\langle B, \mathbf{k}'\rangle \in |\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)|$ i $h \colon A \to B$ (czyli $h \colon \langle A, \mathbf{k}\rangle \to \langle B, \mathbf{k}'\rangle$ w $\mathbf{KAlg}(\Sigma, \Phi)$). Wówczas $h^{\#} \colon \langle A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g})), \iota(\mathbf{g})\rangle \to \langle B, \mathbf{k}\rangle$ to jedyny Σ-homomorfizm $h^{\#} \colon (A + F_{\Sigma,\Phi}(\mathbf{g})) \to B$ taki, że $\eta_A;h^{\#} = h$ i $(\iota;h^{\#})_s(\star) = \mathbf{k}'_s$ dla $s \in S$.

To daje też **2.e: TAK**. $\square$