Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2014/15

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, przyjmując domyślnie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, itp.

Częściowa Σ*-algebra* A składa się, jak na wykładzie, z S-rodzajowego nośnika $|A|_{s\in S}$ oraz, dla każdej nazwy operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, funkcji *częściowej* $f_A: |A|_{s_1} \times \cdots \times |A|_{s_n} \rightharpoonup |A|_s$. Dla dowolnych częściowych Σ-algebr A i B, *częściowy* Σ*-homomorphizm* $h: A \rightharpoonup B$ to S-rodzajowa rodzina funkcji *częściowych* $h = \langle h_s: |A|_s \rightharpoonup |B|_s \rangle_{s\in S}$ taka, że dla każdej nazwy operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω oraz $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $h_s(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n))$, tzn. $h_s(f_A(a_1, \ldots, a_n))$ jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy $f_B(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n))$ jest określone, i jeśli są określone to są to te same elementy w $|B|_s$.

Łatwo sprawdzić, że identyczności sa częściowymi homomorfizmami i że złożenie częściowych homomorfizmów jest częściowym homomorfizmem. Definiuje to kategorię $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ algebr częściowych z częściowymi homomorfizmami.

Niech $\mathbf{PSet}^S$ będzie kategorią wszystkich S-rodzajowych zbiorów z S-rodzajowymi funkcjami *częściowymi* jako morfizmami.

Dla każdej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ mamy oczywisty funktor zapominający $\mathcal{U}_\Sigma: \mathbf{PPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{PSet}^S$.

Dla każdej sygnatury Σ i S-rodzajowego zbioru (zmiennych) X, algebra (całkowita) termów $T_\Sigma(X)$ zdefiniowana jest w zwykły sposób (jak na wykładzie). Dla każdego termu $t \in |T_\Sigma(X)|$, częściowej Σ-algebry A i częściowej funkcji (wartościowania) $v: X \rightharpoonup A$, $t_A[v]$ jest wartością termu t w algebrze A przy (częściowym) wartościowaniu v. Oczywiście, $t_A[v]$ może nie być określone.

Σ*-równości* są, jak na wykładzie, postaci $\forall X.t = t'$, gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem (zmiennych), a $t, t' \in |T_\Sigma(X)|_s$ są Σ-termami (o wspólnym rodzaju) ze zmienymi X. Częściowa Σ-algebra A *mocno spełnia* taką równość, gdy dla każdego (częściowego) wartościowania $v: X \rightharpoonup |A|$, $t_A[v]$ jest określone wtedy i tylko wtedy, gdy $t'_A[v]$ jest określone, i jeśli są określone to $t_A[v] = t'_A[v]$.

Dla dowolnego zbioru Σ-równości Φ, $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$ to pełna podkategoria $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ wyznaczona przez częściowe Σ-algebry, które mocno spełniają wszystkie równości ze zbioru Φ.

Wtedy $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ jest funktorem inkluzji, a $\mathcal{U}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PSet}^S$ oczywistym funktorem zapominającym; $\mathcal{U}_{\Sigma,\Phi} = \mathcal{J}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{U}_\Sigma$.

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii są*
   - FZ. *skończenie zupełne*
   - FKZ. *skończenie kozupełne*
   - Z. *zupełne*
   - KZ. *kozupełne*

   dla każdej sygnatury Σ *i, gdzie stosowne, zbioru* Σ*-równości* Φ*? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*

   (a) $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$

(b) $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$

2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-równości Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathcal{U}_\Sigma \colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{PSet}^S$
   (b) $\mathcal{U}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PSet}^S$
   (c) $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma)$

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób są powiązane zadania 1.Z.a i 1.Z.b: dowód zupełności kategorii $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$ pokazywałby też zupełność $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$, a kontrprzykład na zupełność kategorii $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ byłby też kontrprzykładem na zupełność $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Z drugiej strony, taka konstrukcja zadania niekiedy umożliwia odpowiedź na pytanie łatwiejsze (np. 1.Z.a), bez odpowiadania na pytanie potencjalnie trudniejsze (np. 1.Z.b). Można przyjąć, że odpowiedzi na pytania dotyczące kategorii wyznaczonych przez sygnatury (bez zbiorów równości) wystarczą na ocenę pozytywną.

Szkic jednego z możliwych rozwiązań:

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ rozważmy sygnaturę $\Sigma_\perp = \langle S, \Omega \uplus \{\perp_s \colon s\}_{s \in S} \rangle$, otrzymaną z Σ przez dodanie nowej stałej $\perp_s \colon s$ dla każdego $s \in S$. Niech dalej $\Psi_\perp^\Sigma$ będzie zbiorem wszystkich równości postaci

- $\forall \{x_2 \colon s_2, \ldots, x_n \colon s_n\}. f(\perp_{s_1}, x_2, \ldots, x_n) = \perp_s$,
- $\forall \{x_1 \colon s_1, x_3 \colon s_3, \ldots, x_n \colon s_n\}. f(x_1, \perp_{s_2}, x_3, \ldots, x_n) = \perp_s$,

  $\vdots$
- $\forall \{x_1 \colon s_1, \ldots, x_{n-1} \colon s_{n-1}\}. f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \perp_{s_n}) = \perp_s$,

dla wszystkich nazw operacji $f \colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω.

Rozważmy dowolną (zwykłą) algebrę $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)|$. Niech $\mathbf{P}_\Sigma(A) \in |\mathbf{PPAlg}(\Sigma)|$ będzie częściową Σ-algebrą taką, że:

- dla $s \in S$, $|\mathbf{P}_\Sigma(A)|_s = |A|_s \setminus \{(\perp_s)_A\}$
- dla $f \colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, $f_{\mathbf{P}_\Sigma(A)} = f_A \cap ((|\mathbf{P}_\Sigma(A)|_{s_1} \times \cdots \times |\mathbf{P}_\Sigma(A)|_{s_n}) \times |\mathbf{P}_\Sigma(A)|_s)$.

Dalej, dla dowolnego $\Sigma_\perp$-homomorfizmu $h \colon A \to B$ miedzy algebrami $A, B \in |\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)|$, niech $\mathbf{P}_\Sigma(h) \colon |\mathbf{P}_\Sigma(A)| \rightharpoonup |\mathbf{P}_\Sigma(B)|$ bedzie S-rodzajową funkcją częściową taką, że dla $s \in S$, $\mathbf{P}_\Sigma(h)_s = h_s \cap (|\mathbf{P}_\Sigma(A)|_s \times |\mathbf{P}_\Sigma(B)|_s)$.

Fakt 1 *Dla każdego $\Sigma_\perp$-homomorfizmu $h \colon A \to B$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$, $\mathbf{P}_\Sigma(h) \colon \mathbf{P}_\Sigma(A) \rightharpoonup \mathbf{P}_\Sigma(B)$ jest częściowym Σ-homomorfizmem w $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$.* $\square$

Fakt 2 *Dla każdej sygnatury Σ, $\mathbf{P}_\Sigma \colon \mathbf{Alg}(\Sigma, \Psi_\perp^\Sigma) \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ jest funktorem.* $\square$

Lemat 3 *Dla każdej sygnatury Σ, kategorie* $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ *i* $\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$ *sa równoważne.*
Dowód: Dla dowolnej częściowej Σ-algebry $A \in |\mathbf{PPAlg}(\Sigma)|$, niech $\mathbf{T}_\Sigma(A)$ będzie $\Sigma_\perp$-algebrą taką, że:

- dla $s \in S$, $|\mathbf{T}_\Sigma(A)|_s = |A|_s \uplus \{u_s\}$, gdzie $u_s \notin |A_s|$, oraz $(\perp_s)_{\mathbf{T}_\Sigma(A)} = u_s$,
- dla $f\colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Ω, $c_1 \in |\mathbf{T}_\Sigma(A)|_{s_1}, \ldots, c_n \in |\mathbf{T}_\Sigma(A)|_{s_n}$, jeśli $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in dom(f_A)$ to $f_{\mathbf{T}_\Sigma(A)}(c_1, \ldots, c_n) = f_A(c_1, \ldots, c_n)$, a jeśli $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle \notin dom(f_A)$ to $f_{\mathbf{T}_\Sigma(A)}(c_1, \ldots, c_n) = u_s$.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej częściowej Σ-algebry $A \in |\mathbf{PPAlg}(\Sigma)|$, $\mathbf{T}_\Sigma(A) \models \Psi_\perp^\Sigma$. Dalej, $\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{T}_\Sigma(A)) = A$. Co więcej, dla dowolnej algebry $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)|$, A jest izomorficzna z $\mathbf{T}_\Sigma(\mathbf{P}_\Sigma(A))$.

Łatwo też sprawdzić, że dla dowolnego częściowego Σ-homomorfizmu $h\colon A \rightharpoonup B$ w $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$, jego oczywiste rozszerzenie do funkcji całkowitej $\mathbf{T}_\Sigma(h)\colon |\mathbf{T}_\Sigma(A)| \to |\mathbf{T}_\Sigma(B)|$ przez określenie wyniku dla argumentów spoza $dom(h)$ jako dodanego do $|B|$ elementu odpowiedniego rodzaju (tj. $\mathbf{T}_\Sigma(h)_s(c) = h_s(c)$ dla $c \in dom(h_s)$, a $\mathbf{T}_\Sigma(h)_s(c) = u_s$ jeśli $c \notin dom(h_s)$) daje Σ-homomorfizm $\mathbf{T}_\Sigma(h)\colon \mathbf{T}_\Sigma(A) \to \mathbf{T}_\Sigma(B)$. Wówczas oczywiście $\mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{T}_\Sigma(h)) = h$.

Podsumowując: $\mathbf{T}_\Sigma\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$ jest funktorem takim, że $\mathbf{T}_\Sigma;\mathbf{P}_\Sigma$ jest identycznością na $\mathbf{PPAlg}(\Sigma)$, a $\mathbf{P}_\Sigma;\mathbf{T}_\Sigma$ jest naturalnie izomorficzny z identycznością na $\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$. $\square$

Fakt 4 *Dla każdej sygnatury Σ, Σ-równości $\forall X.t = t'$ i algebry $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$, A spełnia (w zwykłym sensie) $\forall X.t = t'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{P}_\Sigma(A)$ mocno spełnia $\forall X.t = t'$.* $\square$

Wniosek 5 *Dla każdej sygnatury Σ i zbioru Σ-równości Φ, kategorie* $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$ *i* $\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Phi \cup \Psi_\perp^\Sigma)$ *są równoważne.*
Dowód: Równoważność zadają funktory $\mathbf{T}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Phi \cup \Psi_\perp^\Sigma)$ i $\mathbf{P}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Phi \cup \Psi_\perp^\Sigma) \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$, będące odpowiednimi obcięciami funktorów $\mathbf{T}_\Sigma$ i $\mathbf{P}_\Sigma$ z dowodu Wniosku 3. $\square$

Wniosek 6 *Dla dowolnej sygnatury Σ i zbioru Σ-równości Φ, kategoria* $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi)$ *jest zupełna i kozupełna.*
Dowód: Kategoria $\mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Phi \cup \Psi_\perp^\Sigma)$ jest zupełna i kozupełna — a równoważność kategorii zachowuje te własności. $\square$

Wniosek 7 *Dla dowolnej sygnatury Σ i zbioru Σ-równości Φ, funktor* $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma)$ *ma lewy sprzężony.*
Dowód: Niech $\mathcal{J}'_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Phi \cup \Psi_\perp^\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma)$ bedzie funktorem inkluzji. Wówczas (notacja z dowodów Lematu 3 i Wniosku 5) $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi} = \mathbf{T}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{J}'_{\Sigma,\Phi};\mathbf{P}_\Sigma$, a wszystkie te funktory mają lewe sprzężone. $\square$

Wniosek 8 *Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega\rangle$, funktor* $\mathcal{U}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{PSet}^S$ *ma lewy sprzężony.*
Dowód: Zauważmy, że $\mathbf{PSet}^S = \mathbf{PPAlg}(\langle S, \emptyset\rangle)$. Mamy też $\Psi_\perp^{\langle S,\emptyset\rangle} = \emptyset$. Niech $\mathcal{U}'_\Sigma\colon \mathbf{Alg}(\Sigma_\perp, \Psi_\perp^\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\langle S, \emptyset\rangle_\perp)$ będzie funktorem reduktu względem inkluzji sygnatur $\iota\colon \langle S, \emptyset\rangle_\perp \to \Sigma_\perp$. Wówczas (notacja z dowodów Lematu 3 i Wniosków 5 i 7) $\mathcal{U}_{\Sigma,\Phi} = \mathbf{T}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{J}'_{\Sigma,\Phi};\mathcal{U}'_\Sigma;\mathbf{P}_{\langle S,\emptyset\rangle}$, a wszystkie te funktory mają lewe sprzężone. $\square$

Zatem: *Odpowiedzi na wszystkie pytania zadania brzmią: TAK.*