Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2013/14

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu, przyjmując domyślnie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, itp.

Po pytaniu jednego ze studentów, jednak przypomnę: dla dowolnego zbioru S, S-rodzajowy zbiór X to rodzina zbiorów $X = \langle X_s \rangle_{s \in S}$. S-rodzajowa funkcja $f \colon X \to Y$ między S-rodzajowymi zbiorami X i Y to rodzina funkcji $\langle f_s \colon X_s \to Y_s \rangle_{s \in S}$.[1]

Dla dowolnego zbioru S, *S-rodzajowe kamyczki* to $\kappa = \langle S, K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$[2]: zbiór (nazw) „kamyczków" K z przypisanymi im zbiorami (nazw) rodzajów danymi przez funkcje $r \colon K \to \mathcal{P}(S)$. *$S$-rodzajowy zbiór X z kamyczkami* $\kappa = \langle K, k \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$ składa się z S-rodzajowego zbioru $|X| = \langle |X|_s \rangle_{s \in S}$ oraz, dla każdego kamyczka $k \in K$, elementu $k_X \in \bigcap_{s \in r(k)} |X|_s$. Innymi słowy, wartościami kamyczków są elementy wspólne dla nośników ich rodzajów. Niech $\mathbf{SKSet}(\kappa)$ bedzie kategorią, której obiektami są S-rodzajowe zbiory z kamyczkami κ, a morfizmami S-rodzajowe funkcje, które dla każdego rodzaju zachowują wartości kamyczków tego rodzaju (z oczywistym złożeniem). S-rodzajowy zbiór X z kamyczkami $\kappa = \langle K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$ jest *jednorodny*, gdy dla każdych $k \in K$ i $s_1, s_2 \in r(k)$, $|X|_{s_1} = |X|_{s_2}$. $\mathbf{JSKSet}(\kappa)$ jest pełną podkategorią $\mathbf{SKSet}(\kappa)$ wyznaczoną przez zbiory jednorodne. Morfizm $f \colon X \to Y$ jednorodnych S-rodzajowych zbiórów X i Y z kamyczkami κ jest *jednorodny*, gdy dla każdych $k \in K$ i $s_1, s_2 \in r(k)$, $f_{s_1} = f_{s_2}$. $\mathbf{JJSKSet}(\kappa)$ jest podkategorią $\mathbf{JSKSet}(\kappa)$ wyznaczoną przez morfizmy jednorodne.

Sygnatura z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$ składa się z sygnatury algebraicznej $\Sigma(\mathcal{K}) = \langle S, \Omega \rangle$ i S-rodzajowych kamyczków $\kappa(\mathcal{K}) = \langle S, K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$. *Algebra z kamyczkami A* nad sygnaturą z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$ składa się z S-rodzajowego nośnika $|A| = \langle |A|_s \rangle_{s \in S}$, funkcji $f_A \colon |A|_{s_1} \times \cdots |A|_{s_n} \to |A|_s$ dla każdej nazwy operacji $f \colon s_1 \times \cdots s_n \to s$ w Ω, oraz wartości kamyczka $k_A \in \bigcap_{s \in r(k)} |A|_s$ dla każdego $k \in K$. Innymi słowy: A składa się z $\Sigma(\mathcal{K})$-algebry i zbioru z kamyczkami $\kappa(\mathcal{K})$ o S-rodzajowym nośniku wspólnym z tą algebrą. *Homomorphizm $\mathcal{K}$-algebr z kamyczkami* to taki homomorfizm składających się na nie $\Sigma(\mathcal{K})$-algebr, który jest jednocześnie morfizmem składających sie na nie zbiorów z kamyczkami $\kappa(\mathcal{K})$. Z oczywistym złożeniem homomorfizmów, daje to kategorię $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$ algebr z kamyczkami i ich homomorfizmów. Mamy też oczywisty funktor zapominający $\mathcal{S}_{\mathcal{K}} \colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$. $\mathcal{K}$-algebra z kamyczkami $A \in |\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})|$ jest *jednorodna*, gdy składajacy się na nia zbiór z kamyczkami $\kappa(\mathcal{K})$ jest jednorodny. $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K})$ to pełna podkategoria $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$ wyznaczona przez jednorodne algebry z kamyczkami, a $\mathcal{JS}_{\mathcal{K}} \colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$ to ograniczenie funktora $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ do tej podkategorii. $\mathcal{K}$-homomorfizm $h \colon A \to B$ jednorodnych $\mathcal{K}$-algebr A i B z kamyczkami jest *jednorodny*, gdy jest on jednorodny jako morfizm zbiorów z kamyczkami $\kappa(\mathcal{K})$ składajacych sie na te algebry. $\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K})$ to podkategoria $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K})$ wyznaczona przez jednorodne homomorfizmy, a $\mathcal{JJS}_{\mathcal{K}} \colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$ to ograniczenie funktora $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ do tej podkategorii.

Każdej sygnaturze z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r \colon K \to \mathcal{P}(S) \rangle$ przypiszmy zwykłą sygnaturę algebraiczną $\Sigma[\mathcal{K}] = \langle S, \Omega[K, r] \rangle$, gdzie $\Omega[K, r]$ rozszerza Ω o nowe stałe $k \colon s$, dla wszystkich $k \in K$ i $s \in r(k)$ (zakładamy, że w Ω nie ma stałych o nazwach z K)[3]. Przypisując każdej $\mathcal{K}$-algebrze

[1] Uwaga: brak wymagań dotyczących wyników funkcji f_s, $s \in S$, dla elementów wspólnych zbiorów X_s, $s \in S$.

[2] $\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$.

[3] Oczywiście: $\Sigma(\mathcal{K}) \subseteq \Sigma[\mathcal{K}]$, ale inkluzja może być właściwa.

A z kamyczkami zwykłą $\Sigma[\mathcal{K}]$-algebrę o tym samym nośniku, tej samej interpretacji operacji z Ω i o interpretacji stałych $k{:}\,s$ dla $k \in K$ i $s \in r(k)$ jako wartości k_A kamyczków w A, dostajemy funktor $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}{:}\,\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$, oraz jego ograniczenia $\mathcal{JI}_{\mathcal{K}}{:}\,\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$ i $\mathcal{JJI}_{\mathcal{K}}{:}\,\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$.

Morfizm $\sigma{:}\,\mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ sygnatur z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S', \Omega', K', r'{:}\,K' \to \mathcal{P}(S')\rangle$ i $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r{:}\,K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ składa się[4] z morfizmu sygnatur $\sigma{:}\,\Sigma(\mathcal{K}') \to \Sigma(\mathcal{K})$ oraz funkcji $\sigma{:}\,K' \to K$, która zachowuje rodzaje kamyczków, tzn. dla $k' \in K'$, $\sigma(r'(k')) \subseteq r(\sigma(k'))$. Dalej, dla każdej $\mathcal{K}$-algebry z kamyczkami $A \in |\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})|$, definiujemy jej σ-reduct $\mathcal{R}_\sigma(A) \in |\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}')|$ jako $\mathcal{K}'$-algebrę z kamyczkami taką, że $|\mathcal{R}_\sigma(A)|_{s'} = |A|_{\sigma(s')}$ dla $s' \in S'$, $f'_{\mathcal{R}_\sigma(A)} = \sigma(f')_A$ dla każdej nazwy operacji f' w Ω' i $k'_{\mathcal{R}_\sigma(A)} = \sigma(k')_A$ dla $k' \in K'$. Łatwo widać, że w naturalny sposób redukt na algebrach z kamyczkami rozszerza się do funktorów $\mathcal{R}_\sigma{:}\,\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}')$, $\mathcal{JR}_\sigma{:}\,\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}')$ i $\mathcal{JJR}_\sigma{:}\,\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}')$.

W końcu, *kamyczkowymi równościami* nad sygnaturą z kamyczkami $\mathcal{K}$ nazywać będziemy $\Sigma[\mathcal{K}]$-równości. Z definicji, $\mathcal{K}$-algebra z kamyczkami A spełnia kamyczkową równość φ, gdy $\Sigma[\mathcal{K}]$-algebra $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(A)$ spełnia $\Sigma[\mathcal{K}]$-równość φ (w zwykłym sensie). Dla dowolnego zbioru Φ równości kamyczkowych nad sygnaturą z kamyczkami $\mathcal{K}$ wyznacza to pełną podkategorię $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$ kategorii $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$, której obiektami są wszystkie algebry z kamyczkami spełniające wszystkie równości z Φ. Podobnie, pełne podkateogorie $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$ i $\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$ kategorii $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K})$ i $\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K})$, odpowiednio, sa wyznaczone przez jednorodne algebry z kamyczkami spełniające równości Φ. Wskazujemy też odpowiednie ograniczenia funktorów $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}$ i $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$:

- $\mathcal{S}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$,
- $\mathcal{I}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$,
- $\mathcal{JS}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$,
- $\mathcal{JI}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$,
- $\mathcal{JJS}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$,
- $\mathcal{JJI}_{\mathcal{K},\Phi}{:}\,\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$

a także funktora $\mathcal{R}_\sigma$ dla morfizmów $\sigma{:}\,\mathcal{K}' \to \mathcal{K}'$:

- $\mathcal{R}_{\sigma,\Phi}{:}\,\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}')$,
- $\mathcal{JR}_{\sigma,\Phi}{:}\,\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}')$,
- $\mathcal{JJR}_{\sigma,\Phi}{:}\,\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}')$.

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii są*
   Z. *zupełne*
   KZ. *kozupełne*
   dla każdej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r{:}\,K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ i, gdzie stosowne, zbioru $\mathcal{K}$-równości Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   (a) $\mathbf{SKSet}(\kappa(\mathcal{K}))$
   (b) $\mathbf{JSKSet}(\kappa(\mathcal{K}))$
   (c) $\mathbf{JJSKSet}(\kappa(\mathcal{K}))$
   (d) $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$
   (e) $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K})$
   (f) $\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K})$

[4]Dla uproszenia notacji, wszystkie składowe morfizmu oznaczać będziemy tym samym symbolem, co cały morfizm.

(g) $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$
(h) $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$
(i) $\mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$

2. *Które z poniższych funktorów mają* lewy sprzężony *dla każdej sygnatury z kamyczkami* $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r\colon K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ *i, gdzie stosowne, zbioru* $\mathcal{K}$*-równości* Φ*? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathcal{S}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$
   (b) $\mathcal{JS}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$
   (c) $\mathcal{JJS}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Set}^S$
   (d) $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
   (e) $\mathcal{JI}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
   (f) $\mathcal{JJI}_{\mathcal{K}}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
   (g) $\mathcal{S}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (h) $\mathcal{JS}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (i) $\mathcal{JJS}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (j) $\mathcal{I}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
   (k) $\mathcal{JI}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
   (l) $\mathcal{JJI}_{\mathcal{K},\Phi}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$
3. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdego morfizmu sygnatur z kamyczkami* $\sigma\colon \mathcal{K}' \to \mathcal{K}$ *i, gdzie stosowne, zbioru* $\mathcal{K}$*-równości* Φ*? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathcal{R}_{\sigma}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}')$
   (b) $\mathcal{JR}_{\sigma}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}')$
   (c) $\mathcal{JJR}_{\sigma}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}) \to \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}')$
   (d) $\mathcal{R}_{\sigma,\Phi}\colon \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}')$
   (e) $\mathcal{JR}_{\sigma,\Phi}\colon \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}')$
   (f) $\mathcal{JJR}_{\sigma,\Phi}\colon \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{JJKAlg}(\mathcal{K}')$

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów. Kluczem do rowiązania zadania jest więc dobre zrozumienie różnic (lub ich braku) pomiędzy wprowadzonymi pojęciami a standardowymi pojęciami omawianymi na wykładzie.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób są powiązane zadania 1.Z.g i 1.Z.d: dowód zupełności kategorii $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$ pokazywałby też zupełność $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$, a kontrprzykład na zupełność kategorii $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K})$ byłby też kontrprzykładem na zupełność $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka. Z drugiej strony, taka konstrukcja zadania niekiedy umożliwia odpowiedź na pytanie łatwiejsze (np. 1.Z.d), bez odpowiadania na pytanie potencjalnie trudniejsze (np. 1.Z.g). Można przyjąć, że odpowiedzi na pytania dotyczące podkategorii wyznaczonych przez zbiór równości mogą być niezbędne tylko na ocenę bardzo dobrą.

Szkic rozwiązania:

UWAGA: jak słusznie ktoś zauważył, sformułowanie zadania byłoby "czystsze" przy założeniu, że kamyczki maja niepuste zbiory rodzajów: dla wszystkich kamyczków $\kappa = \langle S, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ oraz $k \in K$, $r(k) \neq \emptyset$. Tak też zakładam poniżej.

Niech $\kappa = \langle S, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ będzie dowolnym zbiorem kamyczków. *Spójnym ciągiem kamyczków* w κ nazywamy dowolny ciąg $s_0 k_1 s_1 \cdots s_{n-1} k_n s_n$, gdzie $s_0, \ldots, s_n \in S$ i $k_1, \ldots, k_n \in K$, taki że dla $i = 1, \ldots, n$, $\{s_{i-1}, s_i\} \subseteq r(k_i)$; taki spójny ciąg jest *cyklem kamyczkowym* gdy $s_0 = s_n$, $n > 0$. Każdy taki cykl kamyczkowy wyznacza *cykliczną implikację*

$$\left(\bigwedge_{i=1,\ldots,n-1} (k_i: s_i) = (k_{i+1}: s_i)\right) \Rightarrow (k_1: s_0) = (k_n: s_n)$$

Niech $Q(\kappa)$ będzie zbiorem wszystkich takich cyklicznych implikacji wyznaczonych przez cykle kamyczkowe w κ. Zachodzi oczywiście:

Fakt 1 *Dla dowolnej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ i $\mathcal{K}$-algebry z kamyczkami A, $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(A) \models Q(\kappa(\mathcal{K}))$.*

Lemat 2 *Dla dowolnej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ i $\Sigma[\mathcal{K}]$-algebry B, jeśli $B \models Q(\kappa(\mathcal{K}))$ to istnieje $\mathcal{K}$-algebra z kamyczkami A, taka że B jest izomorficzna z $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(A)$.*

Szkic dowodu: *Można przyjąć, że algebra B ma rozłączne nośniki, tj. dla $s, s' \in S$, $|B_s| \cap |B_{s'}| = \emptyset$ jeśli $s \neq s'$ (bo każda $\Sigma[\mathcal{K}]$-algebra jest izomorficzna z algebrą o tej własności). Niech $\equiv$ będzie najmniejszą relacja równoważności na $\bigcup_{s \in S} |B|_s$ taką że dla $k \in K$ oraz $s, s' \in \mathcal{P}(S)$, $(k: s)_B \equiv (k: s')_B$. Oczywiście $b \equiv b'$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje spójny ciąg kamyczków $s_0 k_1 s_1 \cdots s_{n-1} k_n s_n$, taki że dla $i = 1, \ldots, n-1$, $(k_i: s_i)_B = (k_{i+1}: s_i)_B$ oraz $b = (k_0)_B$ i $b' = (k_n)_B$. Zatem jeśli B spełnia wszystkie cykliczne implikacje wyznaczone przez cykle kamyczkowe w $\kappa(\mathcal{K})$ to dla $s \in S$ oraz $b \in |B|_s$, b jest jedynym elementem zbioru $|B|_s$ w klasie abstrakcji $[b]_\equiv$.*

$\mathcal{K}$-algebrę z kamyczkami A definiujemy jak następuje. Dla $s \in S$, $|A|_s = \{[b]_\equiv \mid b \in |B|_s\}$. Dla kamyczka $k \in K$, $k_A = [(k: s)_B]_\equiv$ dla dowolnego $s \in r(k)$ (k_A nie zależy od wyboru s). Dla operacji $f: s_1 \times \cdots \times s_n \to s$, dla $b_1 \in |B|_{s_1}, \ldots, b_n \in |B|_{s_n}$, $f_A([b_1]_\equiv, \ldots, [b_n]_\equiv) = [f_B(b_1, \ldots, b_n)]_\equiv$ (ta definicja jest jednoznaczna na mocy powyższych własności $\equiv$).

Łatwo teraz sprawdzić, że $\langle [\_]_\equiv: |B|_s \to |A|_s\rangle_{s \in S}$ jest izomorfizmem z algebra B do $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(A)$.

Wniosek 3 *Dla dowolnej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ i zbioru Φ kamyczkowych $\mathcal{K}$-równości, kategorie $\mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi)$ oraz $\mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}], Q(\kappa(\mathcal{K})) \cup \Phi)$ są równoważne. Równoważność jest zadana przez funktor (odpowiednio przycięty) $\mathcal{I}_{\mathcal{K},\Phi}: \mathbf{KAlg}(\mathcal{K}, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}], Q(\kappa(\mathcal{K})) \cup \Phi)$.*

Teraz: ponieważ równoważności kategorii zachowują "wszystkie" ich kategoryjne własności, z własności quasi-rozmaitości algebr wielorodzajowych (kategorii algebr definiowalnych implikacjami równościowymi) dostajemy w punktach **1.{Z,NZ}.{a,d,g}, 2.{a,d,g,j}, 3.{a,d} odpowiedzi pozytywne**.

Przyklad 4 *Rozważmy $\kappa_0 = \langle \{s, s'\}, \{k\}, r(k) = \{s, s'\}\rangle$ i jednorodny zbiór X z kamyczkami κ_0, gdzie $X_s = X_{s'} = \{a, 0\}$ i $k_X = a$. Niech $f: X \to X$ będzie zdefiniowana jak następuje: $f_s(a) = a$, $f_s(0) = a$, a $f_{s'}$ jest identycznością. Wówczas w kategorii $\mathbf{JSKSet}(\kappa_0)$ nie istnieje equalizator dla $f: X \to X$ i $id_X: X \to X$.*

Przypuśćmy przeciwnie, niech $e: Y \to X$ będzie equalizatorem f i id_X. Ponieważ $f;f = f = f;id_X$, *mamy $g: X \to Y$ z $g;e = f$. Niech $y_0 = g_{s'}(0) \in Y_{s'} = Y_s$; mamy $e_{s'}(y_0) = 0$. Ponieważ $e_s;f_s = e_s;id_s = e_s$, więc $e_s(y_0) = a$. Niech dalej $y_a = g_{s'}(a) \in Y_{s'} = Y_s$; mamy $e_{s'}(y_a) = a$, i oczywiście $k_Y = y_a$ oraz $e_s(y_a) = a$. Zatem dla $y_a \neq y_0$ mamy $e_s(y_0) = e_s(y_a)$, więc e_s nie jest mono — sprzeczność.*

Powyższy kontrprzykład daje w punktach **1.Z.{b,e,h} odpowiedzi negatywne**.

Przyklad 5 *Rozważmy $\kappa_1 = \langle\{s, s'\}, \{k\}, r(k) = \{s, s'\}\rangle$ i jednorodny zbiór X z kamyczkami κ_1, gdzie $X_s = X_{s'} = \{a, 0\}$ i $k_X = a$. Niech $f: X \to X$ będzie zdefiniowana jak następuje: $f_s(a) = a$, $f_s(0) = a$, a $f_{s'}$ jest identycznością. Wówczas w kategorii* $\mathbf{JSKSet}(\kappa_1)$ *nie istnieje koequalizator dla $f: X \to X$ i $id_X: X \to X$.*

Przypuśćmy przeciwnie; niech $h: X \to Y$ bedzie koequalizatorem f i id_X. Ponieważ $f;f = f = id_X;f$, mamy $g: Y \to X$ z $h;g = f$. Niech $y_0 = h_{s'}(0) \in Y_{s'} = Y_s$. Ponieważ $g_{s'}(y_0) = f_{s'}(0) = 0$, więc $y_0 \neq k_Y$. Natomiast $g_s(0) = g_s(a) = k_Y$. Zatem $g_s: \{a, 0\} \to Y_s$ nie jest "na", więc g nie jest epi — sprzeczność;

Powyższy kontrprzykład daje w punktach **1.KZ.{b,e,h} odpowiedzi negatywne**.

Przyklad 6 *Rozważmy kamyczkową sygnaturę $\mathcal{K}_2$ z dwoma rodzajami s, s', stałą $c: s$ i kamyczkiem k, $r(k) = \{s, s'\}$. W kategorii* $\mathbf{JKAlg}(\mathcal{K}_2)$ *jednorodnych $\mathcal{K}_2$-algebr z kamyczkami i niekoniecznie jednorodnymi homomorfizmami nie istnieje obiekt początkowy.*

Przypuśćmy przeciwnie: w algebrze początkowej, w nośniku rodzaju s wartości stałej c i kamyczka k muszą być różne. Z jednorodności, w nośniku rodzaju s' też mamy ten element i jest on różny od wartości kamyczka. Z takiej algebry istnieje więcej niż jeden homomorfizm do algebry, w której nośniku (obu rodzajów) mamy więcej niż jeden element różny od wartości kamyczka.

Ten przykład nie tylko potwierdza negatywne odpowiedzi w punktach 1.KZ.{e,h}, ale ponieważ lewe sprzężone zachowują kogranice (w szczególności obiekty początkowe), daje także w punktach **2.{b,e,h,k}, 3.{b,e} odpowiedzi negatywne**.

Dla dowolnej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$, niech $\approx$ będzie najmniejsza relacją równowazności na S taką że dla $k \in K$ oraz $s, s' \in r(k)$, $s \approx s'$. Zdefiniujmy wielorodzajową sygnaturę algebraiczną $\Sigma_\approx[\mathcal{K}]$, której rodzajami są klasy abstrakcji relacji $\approx$, a operacje to $f_{s_1 \ldots s_n \to s}: [s_1]_\approx \times \ldots \times [s_n]_\approx \to [s]_\approx$ dla każdej operacji $f: s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Ω oraz stałe $k: [s]_\approx$ dla każdego kamyczka $k \in K$, gdzie $s \in r(k)$. Każda kamyczkowa $\mathcal{K}$-równość jest (z dokładnością do dekoracji nazw operacji i nazw rodzajów) $\Sigma_\approx[\mathcal{K}]$-równością.

Oczywiste przypisanie każdej jednorodnej $\mathcal{K}$-algebrze z kamyczkami A $\Sigma_\approx[\mathcal{K}]$-algebry $A_\approx$, gdzie dla każdego rodzaju $[s]_\approx$, $s \in S$, $|A_\approx|_{[s]_\approx} = |A|_s$, dla każdej operacji $f_{s_1 \ldots s_n \to s}: [s_1]_\approx \times \ldots \times [s_n]_\approx \to [s]_\approx$, $f: s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Ω, $(f_{s_1 \ldots s_n \to s})_{A_\approx} = f_A$, oraz każdej stałej $k: [s]_\approx$, $k \in K$, $s \in r(k)$, $k_{A_\approx} = k_A$ (łatwo sprawdzić, że jest do dobra definicja) daje następujący fakt:

Fakt 7 *Dla dowolnej sygnatury z kamyczkami $\mathcal{K} = \langle S, \Omega, K, r: K \to \mathcal{P}(S)\rangle$ i zbioru kamyczkowych $\mathcal{K}$-równości Φ, kategorie* $\mathbf{JJSKSet}(\mathcal{K}, \Phi)$ *i* $\mathbf{Alg}(\Sigma_\approx[\mathcal{K}], \Phi)$ *są izomorficzne.*

To z kolei łatwo implikuje w punktach **1.{Z,KZ}.{c,f,i}, 2.{c,f,i,l}, 3.{c,f} odpowiedzi pozytywne**. Na przykład, w punkcie 2.l należy rozważyć złożenie izomorfizmu z Faktu 7 z funktorem reduktu z $\mathbf{Alg}(\Sigma_\approx[\mathcal{K}], \Phi)$ do $\mathbf{Alg}(\Sigma[\mathcal{K}])$ względem oczywistego morfizmu sygnatur z $\Sigma[\mathcal{K}]$ do $\Sigma_\approx[\mathcal{K}]$.