Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2012/13

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu, przyjmując domyślnie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, itp.

Ważoną Σ-algebrą nazwiemy parę $\langle A, w \rangle$, gdzie A to Σ-algebra, a $w = \langle w_s \colon |A|_s \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rangle_{s \in S}$ jest rodziną funkcji odwzorowujących elementy nośników algebry w zbiory liczb naturalnych, taką że dla każdej nazwy operacji $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Σ i elementów $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $\{\Sigma_{i=1}^n k_i \mid k_i \in w_{s_i}(a_i), i = 1, \ldots, n\} \subseteq w_s(f_A(a_1, \ldots, a_n))$ (dla stałych $c \colon s$ oznacza to $0 \in w_s(c_A)$). Ważona Σ-algebra $\langle A, w \rangle$ jest *skończenie ważona* jeśli dla wszystkich $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $w_s(a)$ jest zbiorem skończonym. Ważona Σ-algebra $\langle A, w \rangle$ jest *dobrze ważona* jeśli dla wszystkich $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $w_s(a)$ jest zbiorem jednoelementowym.

Σ-homomorfizm $h \colon A \to B$ jest *ważonym* homomorfizmem ważonych Σ-algebr $\langle A, w \rangle$ i $\langle A', w' \rangle$ jeśli dla każdego rodzaju $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $w_s(a) \subseteq w'_s(h_s(a))$. Ważony Σ-homomorfizm $h \colon \langle A, w \rangle \to \langle A', w' \rangle$ jest *dokładny* jeśli dla każdego rodzaju $s \in S$ i $a' \in |A'|_s$, $w'_s(a') = \bigcup \{w_s(a) \mid a \in |A|_s, h_s(a) = a'\}$.

Definiujemy następujące kategorie:

- $\mathbf{Set}^S$: kategoria S-rodzajowych zbiorów i funkcji między nimi, jak zwykle.
- $\mathbf{WAlg}(\Sigma)$: kategoria ważonych Σ-algebr i ważonych Σ-homomorfizmów między nimi.
- $\mathbf{SWAlg}(\Sigma)$: kategoria skończenie ważonych Σ-algebr i ważonych Σ-homomorfizmów między nimi.
- $\mathbf{DWAlg}(\Sigma)$: kategoria dobrze ważonych Σ-algebr i ważonych Σ-homomorfizmów między nimi.
- $\mathbf{WAlg}_D(\Sigma)$: kategoria ważonych Σ-algebr i dokładnych ważonych Σ-homomorfizmów między nimi.
- $\mathbf{SWAlg}_D(\Sigma)$: kategoria skończenie ważonych Σ-algebr i dokładnych ważonych Σ-homomorfizmów między nimi.

Dalej, definiujemy oczywiste funktory przyporządkowujące ważonym algebrom ich (S-rodzajowe) nośniki, a ważonym homomorfizmom (S-rodzajowe) funkcje, którymi one są:

- $\mathbf{G}_\Sigma \colon \mathbf{WAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{SG}_\Sigma \colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{DG}_\Sigma \colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$

Ważone równości są postaci $\forall X.t = t' \leq n$, gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem (zmiennych), $t, t' \in |T_\Sigma(X)|_s$ są Σ-termami (o wspólnym rodzaju) ze zmienymi X, a $n \in \mathbb{N}$ jest liczbą naturalną.

Ważona Σ-algebra $\langle A, w \rangle$ *spełnia* taką równość, $\langle A, p \rangle \models \forall X.t = t' \leq n$, gdy dla każdego wartościowania zmiennych $v \colon X \to |A|$, $t_A[v] = t'_A[v]$ (gdzie $t_A[v]$ i $t'_A[v]$ to wartości termów t i t', odpowiednio, w algebrze A przy wartościowaniu v) oraz $k \leq n$ dla każdego $k \in w_s(t_A[v])$.

Niech Φ będzie zbiorem takich ważonych równości. Definiujemy $\mathbf{WAlg}(\Sigma, \Phi)$, $\mathbf{SWAlg}(\Sigma, \Phi)$ i $\mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi)$ jako pełne podkategorie zdefiniowanych już kategorii $\mathbf{WAlg}(\Sigma)$, $\mathbf{SWAlg}(\Sigma)$ i $\mathbf{DWAlg}(\Sigma)$, odpowiednio, wyznaczone przez ważone algebry spełniające wszystkie ważone równości w Φ. Wprowadzamy następujące oznaczenia na oczywiste funktory będące ograniczeniami funktorów zdefiniowanych powyżej do odpowiednich podkategorii:

- $\mathbf{G}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{WAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{SG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{DG}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$

Przyjmujemy zwykłą (z wykładu) definicje morfizmu sygnatur $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma'$. Dla kazdego morfizmu $\sigma \colon \Sigma \to \Sigma'$ definiujemy oczywisty funktor reduktu $\mathbf{R}_\sigma \colon \mathbf{WAlg}(\Sigma') \to \mathbf{WAlg}(\Sigma)$ Funktor $\mathbf{R}_\sigma$ zachowuje "skonczoną ważoność" i "dobrą ważoność" algebr, co pozwala zdefiniować następujące funktory jako jego ograniczenia do odpowiedniej podkategorii, dla dowolnego zbioru ważonych Σ'-równości Φ':

- $\mathbf{SR}_\sigma \colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma') \to \mathbf{SWAlg}(\Sigma)$

- $\mathbf{DR}_\sigma\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma') \to \mathbf{DWAlg}(\Sigma)$
- $\mathbf{R}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{WAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{WAlg}(\Sigma)$
- $\mathbf{SR}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{SWAlg}(\Sigma)$
- $\mathbf{DR}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{DWAlg}(\Sigma)$

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii są*

   Z. zupełne

   SZ. skończenie zupełne

   KZ. kozupełne

   SKZ. skończenie kozupełne

   dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru ważonych równości Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

   (a) $\mathbf{WAlg}(\Sigma)$
   (b) $\mathbf{SWAlg}(\Sigma)$
   (c) $\mathbf{DWAlg}(\Sigma)$
   (d) $\mathbf{WAlg}_D(\Sigma)$
   (e) $\mathbf{SWAlg}_D(\Sigma)$
   (f) $\mathbf{WAlg}(\Sigma, \Phi)$
   (g) $\mathbf{SWAlg}(\Sigma, \Phi)$
   (h) $\mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi)$

2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru ważonych równości Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*

   (a) $\mathbf{G}_\Sigma\colon \mathbf{WAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   (b) $\mathbf{SG}_\Sigma\colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   (c) $\mathbf{DG}_\Sigma\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$
   (d) $\mathbf{G}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{WAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (e) $\mathbf{SG}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (f) $\mathbf{DG}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$

3. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdego morfizmu sygnatur $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma'$ i, gdzie stosowne, zbioru ważonych Σ'-równości Φ'? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*

   (a) $\mathbf{R}_\sigma\colon \mathbf{WAlg}(\Sigma') \to \mathbf{WAlg}(\Sigma)$
   (b) $\mathbf{SR}_\sigma\colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma') \to \mathbf{SWAlg}(\Sigma)$
   (c) $\mathbf{DR}_\sigma\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma') \to \mathbf{DWAlg}(\Sigma)$
   (d) $\mathbf{R}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{WAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{WAlg}(\Sigma)$
   (e) $\mathbf{SR}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{SWAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{SWAlg}(\Sigma)$
   (f) $\mathbf{DR}_{\sigma,\Phi'}\colon \mathbf{DWAlg}(\Sigma', \Phi') \to \mathbf{DWAlg}(\Sigma)$

Uwagi:

- Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
- Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób mogą być powiązane zadania 1.KZ.f i 1.KZ.c: dowód kozupełności kategorii $\mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi)$ pokazywałby też kozupełność $\mathbf{DWAlg}(\Sigma)$, a kontrprzykład na kozupełność kategorii $\mathbf{DWAlg}(\Sigma)$ byłby też kontrprzykładem na kozupełność $\mathbf{DWAlg}(\Sigma, \Phi)$. Jeszcze prościej, zupełność dowolnej kateogorii implikuje jej skończoną zupełność, a kontrprzykład na skończoną zupełność (skończony diagram, który nie ma granicy) jest też kontrprzykładem na zupełność danej kateogrii. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc znacznie mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.