Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2011/12

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Krata zupełna $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ to zbiór P z relacją (częściowego) porządku $\leq \subseteq P \times P$ taką, że każdy podzbiór $X \subseteq P$ ma kres górny $\bigsqcup X$ w $\mathcal{P}$ (co implikuje istnienie kresów dolnych).

Okratowaną sygnaturą nazwiemy każdą parę $\langle \Sigma, \mathcal{P} \rangle$, gdzie Σ to sygnatura algebraiczna a $\mathcal{P}$ to krata zupełna. Niech $\langle \Sigma, \mathcal{P} \rangle$, gdzie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ i $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$, będzie taką okratowaną sygnaturą.

$\mathcal{P}$-okratowaną Σ-algebrą nazwiemy parę $\langle A, p \rangle$, gdzie A to Σ-algebra, a $p = \langle p_s : |A|_s \to P \rangle_{s \in S}$ jest rodziną funkcji odwzorowujących elementy nośników algebry w kratę. Σ-homomorfizm $h : A \to B$ jest *przyzwoitym* homomorfizmem $\mathcal{P}$-okratowanych Σ-algebr $\langle A, p \rangle$ i $\langle B, q \rangle$ jeśli dla każdego rodzaju $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $p_s(a) \leq q_s(h(a))$. $\mathcal{P}$-okratowana Σ-algebra $\langle A, p \rangle$ jest *przyzwoita* gdy dla każdej operacji $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ w Σ i elementów $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $p_{s_i}(a_i) \leq p_s(f_A(a_1, \ldots, a_n))$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Definiujemy następujące kategorie:

- $\mathbf{Set}^S$: kategoria S-rodzajowych zbiorów i funkcji między nimi, jak zwykle.
- $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P})$: kategoria $\mathcal{P}$-okratowanych Σ-algebr i zwykłych Σ-homomorfizmów między ich algebrami,
- $\mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$: kategoria $\mathcal{P}$-okratowanych Σ-algebr i przyzwoitych homomorfizmów między nimi.
- $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$: kategoria przyzwoitych $\mathcal{P}$-okratowanych Σ-algebr i przyzwoitych homomorfizmów między nimi.

Może warto zauważyć, że $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$ jest (pełną) podkategorią kategorii $\mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$, która z kolei jest (niekoniecznie pełną) podkategorią kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P})$.

Dalej, definiujemy trzy oczywiste funktory przyporządkowujące algebrom ich (S-rodzajowe) nośniki a homomorfizmom (S-rodzajowe) funkcje, którymi one są:

- $\mathbf{G}_{\Sigma,\mathcal{P}} : \mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P}} : \mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{PPG}_{\Sigma,\mathcal{P}} : \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$

Okratowane nierówności są postaci $\forall X. t \leq t'$, gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem (zmiennych), a $t \in |T_\Sigma(X)|_s$ i $t' \in |T_\Sigma(X)|_{s'}$ są Σ-termami (o niekoniecznie wspólnym rodzaju) ze zmienymi X. $\mathcal{P}$-okratowana Σ-algebra $\langle A, p \rangle$ *spełnia* taką nierówność, $\langle A, p \rangle \models \forall X. t \leq t'$, gdy dla każdego wartościowania zmiennych $v : X \to |A|$, $p_s(t_A[v]) \leq p_{s'}(t'_A[v])$, gdzie jak zwykle $t_A[v]$ i $t'_A[v]$ to wartości termów t i t', odpowiednio, w algebrze A przy wartościowaniu v.

Niech Φ będzie zbiorem takich okratowanych nierówności. Definiujemy $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$, $\mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$ i $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$ jako pełne podkategorie zdefiniowanych już kategorii $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P})$, $\mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$ i $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P})$, odpowiednio, wyznaczone przez okratowane algebry spełniające wszystkie nierówności w Φ. Wprowadzamy następujące oznaczenia na oczywiste funktory będące ograniczeniami funktorów zdefiniowanych powyżej do odpowiednich podkategorii:

- $\mathbf{G}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi} : \mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi} : \mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$
- $\mathbf{PPG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi} : \mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$

Morfizmem okratowanych sygnatur $\langle \Sigma . \mathcal{P} \rangle$ i $\langle \Sigma', \mathcal{P}' \rangle$, gdzie $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$, $\Sigma = \langle S', \Omega' \rangle$, $\mathcal{P} = \langle P, \leq \rangle$ i $\mathcal{P}' = \langle P', \leq' \rangle$, jest para $\langle \sigma, k \rangle : \langle \Sigma, \mathcal{P} \rangle \to \langle \Sigma' . \mathcal{P}' \rangle$, gdzie $\sigma : \Sigma \to \Sigma'$ jest morfizmem sygnatur algebraicznych, zaś $k : P' \to P$ (tak, ma być kontrawariantnie) jest funkcją ciągłą (zachowującą kresy górne i dolne podzbiorów P').

Dla każdego morfizmu $\langle \sigma, k \rangle : \langle \Sigma, \mathcal{P} \rangle \to \langle \Sigma', \mathcal{P}' \rangle$ jak wyżej, definiujemy funktor reduktu:

– $\mathbf{R}_{\sigma,k}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P})$
  - na $\mathcal{P}'$-okratowanych Σ'-algebrach $\langle A',p'\rangle \in |\mathbf{Alg}(\Sigma',\mathcal{P}')|$, definiujemy

$$\mathbf{R}_{\sigma,k}(\langle A',p'\rangle) = \langle A|_\sigma, \langle p'_{\sigma(s)};k\colon |A'|_\sigma|_s \to P\rangle_{s\in S}\rangle$$

    gdzie $A|_\sigma$ to Σ-algebra zdefiniowana jako σ-reduct Σ'-algebry A';
  - na Σ'-homomorfizmach $\mathbf{R}_{\sigma,k}$ jest po prostu reduktem względem σ, $\mathbf{R}_{\sigma,k}(h') = h'|_\sigma$.

Funktor $\mathbf{R}_{\sigma,k}$ zachowuje przyzwoitość okratowanych algebr i ich homomorfizmów, co pozwala zdefiniować następujące funktory jako jego ograniczenia do odpowiedniej podkategorii:

– $\mathbf{PR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$
– $\mathbf{PPR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$

Zadanie:

1. *Które z poniższych kategorii są*
   Z. zupełne
   KZ. kozupełne
   dla każdej okratowanej sygnatury $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$ i, gdzie stosowne, zbioru okratowanych nierówności Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.
   (a) $\mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P})$
   (b) $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$
   (c) $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$
   (d) $\mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$
   (e) $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$
   (f) $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$
2. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdej okratowanej sygnatury $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$ i, gdzie stosowne, zbioru okratowanych nierówności Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathbf{G}_{\Sigma,\mathcal{P}}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$
   (b) $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P}}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$
   (c) $\mathbf{PPG}_{\Sigma,\mathcal{P}}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P}) \to \mathbf{Set}^S$
   (d) $\mathbf{G}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (e) $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi) \to \mathbf{Set}^S$
   (f) $\mathbf{PPG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi) \to \mathbf{Set}^S$
3. *Które z poniższych funktorów mają lewy sprzężony dla każdego morfizmu okratowanych sygnatur $\langle\sigma,k\rangle\colon \langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle \to \langle\Sigma',\mathcal{P}'\rangle$? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.*
   (a) $\mathbf{R}_{\sigma,k}\colon \mathbf{Alg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{Alg}(\Sigma,\mathcal{P})$
   (b) $\mathbf{PR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$
   (c) $\mathbf{PPR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$

Uwagi:

– Można korzystać z omawianych na wykładzie konstrukcji i twierdzeń bez powtarzania ich dowodów.
– Odpowiedzi na powyższe pytania nie są niezależne. Na przykład, w oczywisty sposób mogą być powiązane zadania 1.KZ.f i 1.KZ.c: dowód kozupełności kategorii $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$ pokazywałby też kozupełność $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$, a kontrprzykład na kozupełność kategorii $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ byłby też kontrprzykładem na kozupełność $\mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$. W takich przypadkach wystarczy to po prostu wskazać, nie powtarzając argumentacji. Tak naprawdę jest tu więc mniej pytań niż mogłoby się wydawać na pierwszy rzut oka.

Szkic rozwiązania:

Fakt 1 *Dla dowolnej sygnatury algebraicznej Σ, kategoria $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ jest zupełna i kozupełna.*

Dowód: *Standardowy fakt i konstrukcje z wykladu.* $\square$

Fakt 2 *Dla dowolnego morfizmu sygnatur algebraicznych $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma'$, funktor σ-reduktu ma lewy sprzężony $\mathbf{F}_\sigma\colon \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma')$ z jednością η^σ.*

Dowód: *Standardowy fakt i konstrukcja z wykladu.* $\square$

Fakt 3 *Dla dowolnej okratowanej sygnatury $\langle \Sigma, \mathcal{P}\rangle$ i zbioru okratowanych nierówności Φ, kategorie $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ i $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$ są równoważne.*

Dowód: *Równoważność jest dana przez funktor zapominający o okratowaniu algebr i np. $F^\top\colon \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$, gdzie $F^\top(A) = \langle A, p^\top\rangle$, gdzie dla $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $p^\top(a) = \top = \sqcup P$. Wtedy $F^\top(A) \models \Phi$, a dla każdej okratowanej algebry $\langle A, p\rangle \in |\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)|$, homomorfizm identycznościowy $id_A\colon \langle A, p\rangle \to \langle A, p^\top\rangle$ jest izomorfizmem w $\mathbf{Alg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$.* $\square$

Z Faktów 1 i 3 dostajemy **pozytywne odpowiedzi na pytania 1.Z.a, 1.Z.d, 1.KZ.a, 1.KZ.d**, a z Faktów 2 i 3 **pozytywne odpowiedzi na pytania 2.a, 2.d i 3.a**.

Pozytywną odpowiedź na pytanie 1.Z.e, oraz wynikającą z tego natychmiast **pozytywną odpowiedź na pytanie 1.Z.b**, daje następujący fakt:

Fakt 4 *Kategoria $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P}, \Sigma, \Phi)$ jest zupełna dla każdej okratowanej sygnatury $\langle \Sigma, \mathcal{P}\rangle$ i zbioru okratowanych nierówności Φ.*

Dowód: *Niech D będzie dowolnym diagramem w $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P}, \Sigma, \Phi)$, gdzie graf diagramu $G(D)$ ma wierzchołki N i krawędzie E. Niech $A(D)$ będzie diagramem w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ tego samego kształtu, gdzie $D_n = \langle A_n, p_n\rangle$ i $A(D)_n = A_n$ dla $n \in N$ oraz $A(D)_e = D_e$ dla $e \in E$. Niech A_0 z rzutowaniami $\pi_n\colon A_0 \to A_n$, $n \in N$, bedzie granicą $A(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (patrz Fakt 1). Niech dalej p_0 będzie następującym okratowaniem A_0: dla $s \in S$, $a \in |A_0|_s$, $p_0(a) = \sqcap\{p_n(\pi_n(a)) \mid n \in N\}$ (dokładniej: $(p_0)_s(a) = \sqcap\{(p_n)_s((\pi_n)_s(a)) \mid n \in N\}$ — podobnie będe pomijał odpowiednie indeksowanie rodzajami poniżej).*

Wtedy dla dowolnej nierówności $\forall X.t \leq t'$ w Φ oraz wartościowania $v\colon X \to |A_0|$, ponieważ $A_n \models \Phi$ dla $n \in N$, więc mamy $p_n(\pi_n(t_{A_0}[v])) = p_n(t_{A_n}[v;\pi_n]) \leq p_n(t'_{A_n}[v;\pi_n]) = p_n(\pi_n(t'_{A_0}[v]))$. Zatem

$$p_0(t_{A_0}[v]) = \sqcap\{p_n(\pi_n(t_{A_0}[v])) \mid n \in N\} \leq \sqcap\{p_n(\pi_n(t'_{A_0}[v])) \mid n \in N\} = p_0(t'_{A_0}[v]).$$

Dostaliśmy więc $\langle A_0, p_0\rangle \models \Phi$.

Dalej, homomorfizmy $\pi_n\colon A_0 \to A_n$, $n \in N$, są przyzwoite i tworzą stożek nad D w $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P}, \Sigma, \Phi)$.

Niech $f_n\colon \langle A, p\rangle \to \langle A_n, p_n\rangle$, $n \in N$, będzie dowolnym stożkiem nad D w $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P}, \Sigma, \Phi)$. Niech wtedy $h\colon A \to A_0$ będzie jedynym homomorfizmem takim, że dla $n \in N$, $h;\pi_n = f_n$. Wtedy dla $s \in S$ i $a \in |A|_s$, dla $n \in N$, $p(a) \leq p_n(f_n(a)) = p_n(\pi_n(h(a)))$, więc $p(a) \leq \sqcap\{p_n(\pi_n(a)) \mid n \in N\} = p(h(a))$. Zatem $h\colon \langle A, p\rangle \to \langle A_0, p_0\rangle$ jest przyzwoity, co dowodzi, że $\langle A_0, p_0\rangle$ z rzutowaniami $\pi_n\colon A_0 \to A_n$, $n \in N$, jest granicą D w $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P}, \Sigma, \Phi)$ — co z kolei kończy dowód. $\square$

Fakt 5 *Dla dowolnej okratowanej sygnatury $\langle \Sigma, \mathcal{P}\rangle$ i zbioru nierówności Φ, kategoria $\mathbf{PPAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi)$ jest tożsama z kategorią $\mathbf{PAlg}(\Sigma, \mathcal{P}, \Phi \cup \Phi_P)$, gdzie Φ_P to zbiór wszystkich nierówności postaci*

$$\forall x_1{:}s_1, \ldots, x_n{:}s_n.\ x_i \leq f(x_1, \ldots, x_n)$$

dla operacji $f\colon s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ w Σ ortaz $i = 1, \ldots, n$.

Dowód: *Wprost z definicji.* $\square$

Fakty 4 i 5 natychmiast dają **pozytywne odpowiedzi na pytania 1.Z.c i 1.Z.f**.

Kozupełność, jak często, jest nieco trudniejsza. Na początek dość łatwa **pozytywna odpowiedź na pytanie 1.KZ.b**:

Fakt 6 *Kategoria* $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P},\Sigma)$ *jest kozupełna dla każdej okratowanej sygnatury* $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$.

Dowód: *Niech D będzie dowolnym diagramem w $\mathbf{PAlg}(\mathcal{P},\Sigma)$, gdzie graf diagramu $G(D)$ ma wierzchołki N i krawędzie E. Niech $A(D)$ będzie diagramem w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ tego samego kształtu, gdzie $D_n = \langle A_n, p_n\rangle$ i $A(D)_n = A_n$ dla $n \in N$ oraz $A(D)_e = D_e$ dla $e \in E$. Niech A_1 z włożeniami $\iota_n\colon A_n \to A_1$, $n \in N$, bedzie kogranicą $A(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (patrz Fakt 1). Niech dalej p_1 będzie następującym okratowaniem A_1: dla $s \in S$, $a \in |A_1|_s$, $p_1(a) = \sqcup\{p_n(a_n) \mid \iota_n(a_n) = a, n \in N\}$.*

Wtedy oczywiście homomorfizmy $\iota_n\colon A_n \to A_1$, $n \in N$, są przyzwoite i tworzą kostożek nad D w $\mathbf{Alg}(\mathcal{P},\Sigma,)$.

Niech $f_n\colon \langle A_n,p_n\rangle \to \langle A,p\rangle$, $n\in N$, będzie dowolnym kostożkiem nad D w $\mathbf{Alg}(\mathcal{P},\Sigma,\Phi)$. Niech wtedy $h\colon A_1 \to A$ będzie jedynym homomorfizmem takim, że dla $n \in N$, $\iota_n;h = f_n$. Dla każdego $s \in S$ i $a \in |A_1|_s$, jeśli dla pewnego $n \in N$ i $a_n \in |A_n|_s$, $\iota_n(a_n) = a$, to $p_n(a_n) \le p(f_n(a_n)) = p(h(a))$, wiec $p_1(a) \le p(h(a))$. Zatem $h\colon \langle A_1,p_1\rangle \to \langle A,p\rangle$ jest przyzwoity, co dowodzi, że $\langle A_1,p_1\rangle$ z włożeniami $\iota_n\colon A_n \to A_1$, $n \in N$, jest kogranicą D w $\mathbf{Alg}(\mathcal{P},\Sigma,)$ — co z kolei kończy dowód. □

Przyda się dalej następujący fakt:

Fakt 7 *Dla każdej okratowanej sygnatury $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$ i zbioru okratowanych nierówności Φ, funktor włożenia $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi) \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ ma lewy sprzężony $\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P}) \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$ taki, że $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi};\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi} = \mathbf{Id}_{\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)}$.*

Dowód: *Niech $\langle A,p\rangle$ będzie dowolna okratowaną $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebrą.*

Zbiór wszystkich okratowań Σ-algebry A z porządkiem "po współrzędnych" — tj. $q \sqsubseteq q'$ gdy dla wszystkich $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $q(a) \le q'(a)$ — tworzy kratę zupełną z kresami wyznaczanymi "po współrzędnych" — tj. dla dowolnej rodziny $\mathcal{Q}$ okratowań algebry A, $(\sqcap\mathcal{Q})(a) = \sqcap\{q(a) \mid q \in \mathcal{Q}\}$ dla wszystkich $s \in S$ i $a \in |A|_s$.

Rozważmy następującą rodzinę okratowań algebry A: $\mathcal{Q}_{p+\Phi} = \{q \mid p \sqsubseteq q, \langle A,q\rangle \models \Phi\}$. Niech $q_{p+\Phi} = \sqcap\mathcal{Q}_{p+\Phi}$. Oczywiście $id_A\colon \langle A,p\rangle \to \langle A,q_{p+\Phi}\rangle$ jest przywoitym homomorfizmem okratowanych algebr. Co więcej, dla dowolnej okratowanej $\langle\Sigma,\Phi\rangle$-algebry $\langle B,q\rangle$ takiej, że $\langle B,q\rangle \models \Phi$, i przyzwoitego homomorfizmu $h\colon \langle A,p\rangle \to \langle B,q\rangle$, zachodzi $p \sqsubseteq h;q$ oraz $\langle A,h;q\rangle \models \Phi$. Zatem $q_{p+\Phi} \sqsubseteq h;q$ i $h\colon \langle A,q_{p+\Phi}\rangle \to \langle B,q\rangle$ jest przyzwoity. To pokazuje, że $\langle A,q_{p+\Phi}\rangle$ z jednością $id_A\colon \langle A,p\rangle \to \langle A,q_{p+\Phi}\rangle$ jest okratowaną algebrą w $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$ wolną nad $\langle A,p\rangle$ względem $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}$. Kładąc $\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(\langle A,p\rangle) = \langle A,q_{p+\Phi}\rangle$, dostajemy $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi};\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi} = \mathbf{Id}_{\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)}$, bo jeśli $\langle A,p\rangle \models \Phi$ to $q_{p+\Phi} = p$. □

Teraz już łatwo o **pozytywną odpowiedź na pytanie 1.KZ.e**:

Fakt 8 *Kategoria $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$ jest kozupełna dla każdej okratowanej sygnatury $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$ i zbioru okratowanych nierówności Φ.*

Dowód: *Niech D będzie dowolnym diagramem w $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi)$. Rozważmy diagram $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(D)$ w $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$. Z Faktu 6 ma on kogranicę. Ponieważ lewe sprzężone zachowują kogranice, więc z Faktu 7 diagram $\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(D))$ ma kogranicę (która jest obrazem względem $\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}$ kogranicy diagramu $\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(D)$ w $\mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$). Ale, wciąż z Faktu 7, $\mathbf{F}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(\mathbf{J}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(D)) = D$, co kończy dowód.* □

Fakty 8 i 5 natychmiast dają **pozytywne odpowiedzi na pytania 1.KZ.c i 1.KZ.f**.

Pozytywną odpowiedź na pytanie 2.e, oraz natychmiast wynikające z niej **pozytywne odpowiedzi na pytania 2.b, 2.f i 2.c** (2.f przez Fakt 5) daje następujący łatwy fakt:

Fakt 9 *Funktor $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P},\Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony dla każdej okratowanej sygnatury $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$ i zbioru okratowanych nierówności Φ.*

Dowód: *Dla dowolnego zbioru $X \in |\mathbf{Set}^S|$, weźmy algebrę Σ-termów $T_\Sigma(X)$ z jednością $\eta_X\colon X \to |T_\Sigma(X)|$. Niech $p^\perp$ będzie najmniejszym okratowaniem tej algebry, tzn. $p^\perp(t) = \perp = \sqcup\emptyset$ dla $t \in |T_\Sigma(X)|$. Wówczas $\langle T_\Sigma(X),p^\perp\rangle \models \Phi$ i $\langle T_\Sigma(X),p^\perp\rangle$ z jednością $\eta_X\colon X \to \mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}(\langle T_\Sigma(X),p^\perp\rangle)$ jest wolna nad X względem $\mathbf{PG}_{\Sigma,\mathcal{P},\Phi}$, ponieważ dla dowolnej okratowanej algebry $\langle A,p\rangle$, każdy Σ-homomorfizm $h\colon T_\Sigma(X) \to A$ jest przyzwoitym homomorfizmem $h\colon \langle T_\Sigma(X),p^\perp\rangle \to \langle A,p\rangle$.* □

Pytania 3.b i 3.c wydają się trudne, więc na początek odpowiedzi na ich ławiejsze przypadki:

Fakt 10 *Dla dowolnej sygnatury Σ, krat zupelnych $\mathcal{P}$ i $\mathcal{P}'$ oraz ciągłej funkcji $k\colon P' \to P$, funktor $\mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P}') \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ ma lewy sprzężony.*

Dowód: *Niech $k'\colon P \to P'$ bedzie zdefiniowana jako $k'(e) = \sqcap\{e' \mid e \le k(e')\}$. Wówczas dla każdego $e \in P$, $e \le k(k'(e))$, bo $k(k'(e)) = \sqcap\{k(e') \mid e \le k(e')\}$ z ciągłości k.*

Dla dowolnej okratowanej $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebry $\langle A,p\rangle$, rozważmy okratowaną $\langle\Sigma,\mathcal{P}'\rangle$-algebrę $\langle A,p;k'\rangle$. Z powyższej własności k' mamy $p \sqsubseteq p;k';k$, więc $id_A\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}(\langle A,p;k'\rangle) = \langle A,p;k';k\rangle$ jest przyzwoitym homomorfizmem okratowanych algebr. Co więcej, dla dowolnej okratowanej $\langle\Sigma,\mathcal{P}'\rangle$-algebry $\langle B,q\rangle$ i przywoitego homomorfizmu $h\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}(\langle B,q\rangle) = \langle B,q;k\rangle$, dla każdego $s \in S$ i $a \in |A|_s$, $p(a) \le k(q(h(a)))$. Zatem $k'(p(a)) \le q(h(a))$, co pokazuje, że $h\colon \langle A,p;k'\rangle \to \langle B,q\rangle$ jest przyzwoitym homomorfizmem okratowanych $\langle\Sigma,\mathcal{P}'\rangle$-algebr. Z tego już łatwo wynika, że $\langle A,p;k'\rangle$ z jednością $id_A\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}(\langle A,p;k'\rangle)$ jest wolna nad $\langle A,p\rangle$ względem $\mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}$, co kończy dowód. □

Fakt 11 *Funktor $\mathbf{PR}_{\sigma,id_P}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma',\mathcal{P}) \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ ma lewy sprzężony dla dowolnych sygnatur Σ, Σ', ich morfizmu $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma'$ i kraty zupelnej $\mathcal{P}$.*

Dowód: *Dla dowolnej okratowanej $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebry $\langle A,p\rangle$, niech $\mathbf{F}_\sigma(A)$ z jednością $\eta^\sigma_A\colon A \to \mathbf{F}_\sigma(A)|_\sigma$ bedzie algebrą wolną nad A względem funktora σ-reductu (patrz Fakt 2). Zdefiniujmy okratowanie p' algebry $\mathbf{F}_\sigma(A)$ jak następuje: dla $s' \in S'$, $a' \in |\mathbf{F}_\sigma(A)|_{s'}$, $p'(a') = \sqcup\{p_s(a) \mid s \in S, \sigma(s) = s', a \in |A|_s, (\eta^\sigma_A)_s(a) = a'\}$. Wówczas $\eta^\sigma_A\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{\sigma,id_P}(\langle\mathbf{F}_\sigma(A),p'\rangle)$ jest przywoitym homomorfizmem okratowanych $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebr.*

Dalej, dla dowolnej okratowanej $\langle\Sigma',\mathcal{P}\rangle$-algebry $\langle B,q'\rangle$ i przywoitego homomorfizmu $f\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{\sigma,id_P}(\langle B,q'\rangle)$ okratowanych $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebr, niech $f^\sharp\colon \mathbf{F}_\sigma(A) \to B$ bedzie jedynym Σ'-homomorfizmem takim, że $\eta^\sigma_A;f^\sharp|_\sigma = f$. Dla $s' \in S'$, $a' \in |\mathbf{F}_\sigma(A)|_{s'}$, jeśli dla pewnych $s \in S$ i $a \in |A|_s$ mamy $\sigma(s) = s'$ i $(\eta^\sigma_A)_s(a) = a'$, to $p_s(a) \le q'_{s'}(f_s(a)) = q'_{s'}(f^\sharp_{s'}(a'))$. Zatem $p'_{s'}(a') \le q'_{s'}(f^\sharp_{s'}(a'))$, więc $f^\sharp\colon \langle F_\sigma(A),p'\rangle \to \langle B,q'\rangle$ jest przywoitym homomorfizmem okratowanych $\langle\Sigma',\mathcal{P}\rangle$-algebr. To dowodzi, że $\langle F_\sigma(A),p'\rangle$ z jednością $\eta^\sigma_A\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{\sigma,id_P}(\langle\mathbf{F}_\sigma(A),p'\rangle)$ jest wolna nad $\langle A,p\rangle$ wzgledem $\mathbf{PR}_{\sigma,id_P}$ i kończy dowód. □

Dla każdego morfizmu okratowanych sygnatur $\langle\sigma,k\rangle\colon \langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle \to \langle\Sigma',\mathcal{P}'\rangle$ mamy $\mathbf{PR}_{\sigma,k} = \mathbf{PR}_{\sigma,id_{P'}};\mathbf{PR}_{id_\Sigma,k}$, więc Fakty 10 i 11 dają **pozytywną odpowiedź na pytanie 3.b**.

Następujący fakt daje **pozytywną odpowiedź na pytanie 3.c** i kończy rozwiązanie zadania egzaminacyjnego:

Fakt 12 *Funktor $\mathbf{PPR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PPAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PPAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ ma lewy sprzężony dla każdego morfizmu okratowanych sygnatur $\langle\sigma,k\rangle\colon \langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle \to \langle\Sigma',\mathcal{P}'\rangle$.*

Dowód: Niech Φ'_P będzie zbiorem okratowanych nierówności, który definiuje kategorię $\mathbf{PPAlg}(\Sigma',\mathcal{P}')$ jako $\mathbf{PAlg}(\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P)$, patrz Fakt 5. Z Faktów 7, 10 i 11, funktor $\mathbf{J}_{\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P};\mathbf{PR}_{\sigma,k}\colon \mathbf{PAlg}(\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P) = \mathbf{PPAlg}(\Sigma',\mathcal{P}') \to \mathbf{PAlg}(\Sigma,\mathcal{P})$ ma lewy sprzężony.

Łatwo sprawdzić, że dla dowolnej przyzwoitej okratowanej $\langle\Sigma',\mathcal{P}'\rangle$-algebry $\langle A',p'\rangle$, $\mathbf{PPR}_{\sigma,k}(\langle A',p'\rangle) = \mathbf{PR}_{\sigma,k}(\mathbf{J}_{\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P}(\langle A',p'\rangle))$, więc dla dowolnej przyzwoitej okratowanej $\langle\Sigma,\mathcal{P}\rangle$-algebry $\langle A,p\rangle$, przywoita okratowana $\langle\Sigma',\mathcal{P}'\rangle$-algebra $\langle A',p'\rangle$ z jednością $\eta_A\colon \langle A,p\rangle \to \mathbf{PR}_{\sigma,k}(\mathbf{J}_{\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P}(\langle A',p'\rangle))$ wolna nad $\langle A,p\rangle$ względem $\mathbf{J}_{\Sigma',\mathcal{P}',\Phi'_P};\mathbf{PR}_{\sigma,k}$ jest też wolna nad $\langle A,p\rangle$ względem $\mathbf{PPR}_{\sigma,k}$ — co kończy dowód. □