Egzamin z wykładu monograficznego

Teoria kategorii w podstawach informatyki
semestr zimowy 2010/11

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Rozważmy dowolną sygnaturę $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$.

Uporządkowana Σ-algebra to dowolna Σ-algebra A, w krórej dodatkowo:

- dla każdego rodzaju $s \in S$, nośnik rodzaju s jest częściowo uporządkowany przez relację $\leq_A^s$ — tzn. w algebrze A dla każdego $s \in S$ mamy zwrotną, przechodnią i antysymetryczną relację $\leq_A^s \subseteq |A|_s \times |A|_s$ (jak zwykle, s możemy pomijać, gdy nie zachodzi obawa nieporozumienia), oraz
- dla każdej nazwy operacji $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, funkcja $f_A\colon |A|_{s_1} \times \ldots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$ jest monotoniczna (zachowuje odpowiedni porządek): dla $a_1, a_1' \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n, a_n' \in |A|_{s_n}$, jeśli $a_1 \leq_A^{s_1} a_1', \ldots, a_n \leq_A^{s_n} a_n'$ to $f_A(a_1, \ldots, a_n) \leq_A^s f_A(a_1', \ldots, a_n')$.

Kraciasta Σ-algebra to taka uporządkowana Σ-algebra, że:

- dla każdego rodzaju $s \in S$, nośnik rodzaju s jest *górną półkratą skończenie zupełną* $\langle |A|_s, \leq_A^s \rangle$: relacja $\leq_A^s \subseteq |A|_s \times |A|_s$ jest częściowym porządkiem takim, że każdy skończony (także pusty) zbiór $Z \subseteq |A|_s$ ma kres górny $\bigsqcup_A Z \in |A|_s$ względem $\leq_A^s$, oraz
- dla każdej nazwy operacji $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, funkcja $f_A\colon |A|_{s_1} \times \ldots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$ jest skończenie ciągła (zachowuje skończone kresy górne): dla skończonych $Z_1 \subseteq |A|_{s_1}, \ldots, Z_n \subseteq |A|_{s_n}$, $f_A(\bigsqcup_A Z_1, \ldots, \bigsqcup_A Z_n) = \bigsqcup_A \{f_A(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in Z_1, \ldots, a_n \in Z_n\}$.

Dla dowolnych uporządkowanych Σ-algebr A, B, *uporządkowany Σ-homomorfizm* $h\colon A \to B$ to taki homomorfizm Σ-algebr $h\colon A \to B$, że dla każdego $s \in S$, funkcja $h_s\colon |A|_s \to |B|_s$ zachowuje porządek: dla $a, a' \in |A|_s$, jeśli $a \leq_A^s a'$ to $h_s(a) \leq_B^s h_s(a')$.

Dla dowolnych kraciastych Σ-algebr A, B, *kraciasty Σ-homomorfizm* $h\colon A \to B$ to taki uporządkowany Σ-homomorfizm $h\colon A \to B$, że dla każdego $s \in S$, funkcja $h_s\colon |A|_s \to |B|_s$ jest skończenie ciągła (zachowuje skończone kresy górne): dla każdego skończonego $Z \subseteq |A|_s$, $h_s(\bigsqcup_A Z) = \bigsqcup_B \{h_s(a) \mid a \in Z\}$.

Rozważamy Σ-*nierówności* postaci $\forall X \cdot t \leq t'$, gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, a $t, t' \in |T_\Sigma(X)|_s$ są dowolnymi Σ-termami o wspólnym rodzaju. Uporządkowana Σ-algebra A *spełnia* Σ-nierówność $\forall X \cdot t \leq t'$, $A \models \forall X \cdot t \leq t'$, gdy dla każdego wartościowania $v\colon X \to |A|$ zachodzi $(t)_A[v] \leq_A (t')_A[v]$, gdzie jak zwykle $t_A[v]$ oznacza wartość termu t w algebrze A przy wartościowaniu zmiennych v, i podobnie dla $t'_A[v]$.

Dla dowolnej sygnatury $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$ i zbioru Σ-nierówności Φ, w oczywisty sposób są zdefiniowane następujące kategorie i funktory:

- $\mathbf{Set}^S$ — kategoria S-rodzajowych zbiorów i funkcji między nimi;
- $\mathbf{POSet}^S$ — kategoria S-rodzajowych zbiorów uporządkowanych, z funkcjami monotonicznymi między nimi;
- $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria tych uporządkowanych Σ-algebr, które spełniają wszystkie nierówności w zbiorze Φ, i uporządkowanych Σ-homomorfizmów między tymi algebrami;
- $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria tych kraciastych Σ-algebr, które spełniają wszystkie nierówności w zbiorze Φ, i uporządkowanych Σ-homomorfizmów między nimi;
- $\mathbf{KKAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria tych kraciastych Σ-algebr, które spełniają wszystkie nierówności w zbiorze Φ, i kraciastych Σ-homomorfizmów między nimi;

- $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry, $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = \langle |A|_s, \leq^s_A\rangle_{s\in S}$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry, $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = \langle |A|_s, \leq^s_A\rangle_{s\in S}$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry, $\mathbf{G}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}(A) = \langle |A|_s, \leq^s_A\rangle_{s\in S}$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry i uporządkowaniu nośników, $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = |A|$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry i uporządkowaniu nośników, $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi}(A) = |A|$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;
- $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KKAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o strukturze algebry i uporządkowaniu nośników, $\mathbf{P}^{\mathbf{KK}}_{\Sigma,\Phi}(A) = |A|$, i w podobnie oczywisty sposób dla homomorfizmów;

W rozwiązaniach można też się odwoływać do innych oczywistych funktorów, np:

- $\mathcal{J}\colon \mathbf{POSet}^S \to \mathbf{Set}^S$ — funktor zapominający o porządku,
- $\mathcal{J}_0\colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{UPAlg}(\Sigma,\Phi)$ — funktor inkluzji podkategorii $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma,\Phi)$ w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma,\Phi)$, itp.

We wprowadzonych wyżej oznaczeniach można pominąć Φ gdy $\Phi = \emptyset$.

Zadanie:

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla każdej sygnatury Σ i, gdzie stosowne, zbioru Σ-nierówności Φ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

UWAGA:

*Egzamin można zdawać w wersji łatwiejszej, złożonej z zadań **UP** i **KUP**, lub w wersji trudnej, złożonej z zadań **KUP** i **KK**. Ta druga, a nawet jej części dołączone do pierwszej, będą wyżej punktowane.*

Odpowiedzi na poszczególne części zadań nie są niezależne (np. dowód dla **UP**.2 implikowałby pozytywną odpowiedź na **UP**.1, a kontrprzykład dla **UP**.1 byłby też kontrprzykładem dla **UP**.2; są też mniej oczywiste zależności). Można to wykorzystać dla skrócenia rozwiązań. Zadnia są więc nieco krótsze niż to się na pozór wydaje. Można też bez dowodów odwoływać się do dowolnych faktów podawanych na wykładzie.

. . . .

Poniżej pytania z odpowiedziami i **szkicem** dowodów. Gdy to wygodne, pomijam indeksowanie nazwami rodzajów (składowych) nośników, funkcji, relacji, itp. Pomijam wersję **KK** — nikt sie za to w zasadzie nie zabrał. Trochę szkoda, ale z drugiej strony zadanie zostanie dla przyszłuch pokoleń studenckich :-)

Zadanie UP:

1. Kategoria $\mathbf{UPAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   TAK, z **UP**.2.a.
   (b) kozupełna.
   TAK, z **UP**.2.b.
2. Kategoria $\mathbf{UPAlg}(\Sigma,\Phi)$ jest

(a) zupełna;

TAK. Wystarczy pokazać istnienie produktów i equalizatorów:

Dla danej rodziny uporządkowanych Σ-algebr A_i, $i \in \mathcal{I}$, spełniających Φ, ich produkt w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$ to produktowa Σ-algebra $\Pi_{i\in\mathcal{I}} A_i$ z porządkiem zdefiniowanym po współrzędnych.

Dla uporządkowanych Σ-homomorphizmów $g, h \colon A \to B$ w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$, ich equalizator to inkluzja podalgebry A_0 algebry A o nośniku $\{a \mid h(a) = g(a)\}$, z porządkiem odziedziczonym z A.

(b) kozupełna.

TAK. Wystarczy pokazać istnienie ko-produktów i ko-equalizatorów:

Weźmy uporządkowane Σ-homomorfizmy $g, h \colon A \to B$ w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$. Niech $\preceq \subseteq |B| \times |B|$ będzie najmniejszą relacja taką że:

i. $\leq_B \subseteq \preceq$,

ii. dla $b \in |B|$, $g(b) \preceq h(b)$ oraz $h(b) \preceq g(b)$,

iii. dla $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, dla $b_1, b'_1 \in |B|_{s_1}, \ldots, b_n, b'_n \in |B|_{s_n}$, jeśli $b_1 \preceq b'_1, \ldots, b_n \preceq b'_n$ to $f_B(b_1, \ldots, b_n) \preceq f_B(b'_1, \ldots, b'_n)$,

iv. dla $b, b', b'' \in |B|$, jeśli $b \preceq b'$ i $b' \preceq b''$ to $b \preceq b''$.

Łatwo sprawdzić, że taka najmniejsza relacja $\preceq$ istnieje, jest quasi-porządkiem zgodnym z operacjami w B i rozszerzającym porządek $\leq_B$. Niech $\sim \subseteq |B| \times |B|$ będzie kongruencją na B wyznaczoną przez $\preceq$, tzn. $\sim = \preceq \cap \preceq^{-1}$. Niech w końcu $B/\sim$ będzie algebrą ilorazową z porządkiem indukowanym przez $\preceq$, tzn. dla $b, b' \in |B|$, $[b]_\sim \leq_{B/\sim} [b']_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $b \preceq b'$. Oczywiście uporządkowana Σ-algebra $B/\sim$ spełnia Φ. Naturalny uporządkowany Σ-homomorfizm $[\_]_\sim \colon B \to B/\sim$ jest ko-equalizatorem h i g w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$.

Weźmy z kolei rodzinę A_i, $i \in \mathcal{I}$, uporządkowanych Σ algebr w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$. Niech $\Sigma_{i\in\mathcal{I}}|A_i| = \{\langle a, i\rangle \mid i \in \mathcal{I}, a \in |A_i|\}$ będzie (rozłączną) sumą nośników algebr A_i, $i \in \mathcal{I}$. Rozważmy Σ-algebrę termów $T = T_\Sigma(\Sigma_{i\in\mathcal{I}}|A_i|)$ i najmniejszą relację $\preceq \subseteq |T| \times |T|$ taką że:

i. dla $i \in \mathcal{I}$, $a, a' \in |A_i|$, jeśli $a \leq_{A_i} a'$ to $\langle a, i\rangle \preceq \langle a', i\rangle$,

ii. dla $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \colon s$, $i \in \mathcal{I}$, $a_1 \in |A_i|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A_i|_{s_n}$, $f(\langle a_1, i\rangle, \ldots, \langle a_n, i\rangle) \preceq \langle f_{A_i}(a_1, \ldots, a_n), i\rangle$ oraz $\langle f_{A_i}(a_1, \ldots, a_n), i\rangle \preceq f(\langle a_1, i\rangle, \ldots, \langle a_n, i\rangle)$,

iii. dla każdej nierówności $\forall X \cdot t \leq t'$ w Φ i wartościowania $v \colon X \to |T|$, $t_T[v] \preceq t'_T[v]$,

iv. dla $f \colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, dla $x_1, y_1 \in |T|_{s_1}, \ldots, x_n, y_n \in |T|_{s_n}$, jeśli $x_1 \preceq y_1, \ldots, x_n \preceq y_n$ to $f_T(x_1, \ldots, x_n) \preceq f_T(y_1, \ldots, y_n)$,

v. dla $x \in |T|$, $x \preceq x$, oraz dla $x', x'' \in |T|$, jeśli $x \preceq x'$ i $x' \preceq x''$ to $x \preceq x''$.

Łatwo sprawdzić, że taka najmniejsza relacja $\preceq$ istnieje, jest quasi-porządkiem zgodnym z operacjami w T i rozszerzającym, w oczywistym sensie, porządki w A_i, $i \in \mathcal{I}$. Niech $\sim \subseteq |T| \times |T|$ będzie kongruencją na T wyznaczoną przez $\preceq$, tzn. $\sim = \preceq \cap \preceq^{-1}$. Niech w końcu $T/\sim$ będzie algebrą ilorazową z porządkiem indukowanym przez $\preceq$, tzn. dla $x, x' \in |T|$, $[x]_\sim \leq_{T/\sim} [x']_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq x'$. Oczywiście uporządkowana Σ-algebra $T/\sim$ spełnia Φ (z warunku (iii) w definicji $\preceq$). Uporządkowana Σ-algebra $T/\sim$ z włożeniami $[\langle \_, i\rangle]_\sim \colon |A_i| \to T/\sim$, $i \in \mathcal{I}$, jest ko-produktem rodziny A_i, $i \in \mathcal{I}$, w $\mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi)$.

3. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_\Sigma \colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   TAK, z **UP**.4.

4. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   TAK, z **UP**.6, bo $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi} = \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{J}$, gdzie funtor $\mathcal{J} \colon \mathbf{POSet}^S \to \mathbf{Set}^S$ ma oczywisty lewy sprzężony.

5. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma \colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   TAK, z **UP**.6.

6. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   TAK. Niech $\langle X, \leq_X\rangle \in |\mathbf{POSet}^S|$ będzie dowolnym S-rodzajowym zbiorem uporządkowanym. Rozważmy algebrę termów $T = T_\Sigma(X)$ i najmniejszą relację $\preceq \subseteq |T| \times |T|$ taką że:

   (a) dla $x, y \in X$, jeśli $x \leq_X y$ to $x \preceq y$,

(b) dla każdej nierówności $\forall X \cdot t \le t'$ w Φ i wartościowania $v\colon X \to |T|$, $t_T[v] \preceq t'_T[v]$,

(c) dla $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, dla $x_1, y_1 \in |T|_{s_1}, \ldots, x_n, y_n \in |T|_{s_n}$, jeśli $x_1 \preceq y_1, \ldots, x_n \preceq y_n$ to $f_T(x_1, \ldots, x_n) \preceq f_T(y_1, \ldots, y_n)$,

(d) dla $x \in |T|$, $x \preceq x$, oraz dla $x', x'' \in |T|$, jeśli $x \preceq x'$ i $x' \preceq x''$ to $x \preceq x''$.

Łatwo sprawdzić, że taka najmniejsza relacja $\preceq$ istnieje, jest quasi-porządkiem zgodnym z operacjami w T i rozszerzającym porządek w X. Niech $\sim \subseteq |T| \times |T|$ będzie kongruencją na T wyznaczoną przez $\preceq$, tzn. $\sim = \preceq \cap \preceq^{-1}$. Niech w końcu $T/{\sim}$ będzie algebrą ilorazową z porządkiem indukowanym przez $\preceq$, tzn. dla $x, x' \in |T|$, $[x]_\sim \le_{T/\sim} [x']_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \preceq x'$. Oczywiście uporządkowana Σ-algebra $T/{\sim}$ spełnia Φ (z warunku (b) w definicji $\preceq$). Uporządkowana Σ-algebra $T/{\sim}$ z jednością $[\_]_\sim\colon X \to |T/{\sim}|$ w $\mathbf{POSet}^S$, jest obiektem wolnym nad $\langle X, \le_X \rangle$ względem funktora $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$.

7. Jeśli funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony $\mathbf{L}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{Set}^S \to \mathbf{UPAlg}(\Sigma)$, to niech $\mathbf{M}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ będzie monadą wyznaczoną przez to sprzężenie, a $\mathbf{Alg}(\mathbf{M}^{\mathbf{UP}}_\Sigma)$ będzie kategorią algebr Eilenberga-Moore'a dla tej monady. Czy funktor porównania $\mathbf{R}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\mathbf{M}^{\mathbf{UP}}_\Sigma)$ zgodny z odpowiednimi funktorami obu sprzężeń jest izomorfizmem?

   NIE. Nieco nieformalnie: dla $X \in |\mathbf{Set}^S|$, $\mathbf{L}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(X)$ jest Σ-algebrą termów z trywialnym (identycznościowym) porządkiem. Zatem monada $\mathbf{M}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ jest tożsama ze zwykłą monadą Σ-termów i $\mathbf{Alg}(\mathbf{M}^{\mathbf{UP}}_\Sigma)$ to po prostu $\mathbf{Alg}(\Sigma)$. Nieco formalniej: na wykładzie podałem, że dla $A \in |\mathbf{UPAlg}(\Sigma)|$, $\mathbf{R}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \langle \mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A), \mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\varepsilon_A) \rangle$, gdzie $\varepsilon_A\colon \mathbf{L}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\mathbf{P}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A)) \to A$ jest ko-jednością sprzężenia. Łatwo teraz pokazać, że jeśli uporządkowane Σ-algebry A i A' różnią się tylko porządkiem (mają wspólne nośniki i tak samo zdefiniowane operacje), to $\mathbf{R}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \mathbf{R}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A')$ — więc $\mathbf{R}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ nie jest różnowartościowy.

8. Jeśli funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony $\mathbf{F}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{POSet}^S \to \mathbf{UPAlg}(\Sigma)$, to niech $\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ będzie monadą wyznaczoną przez to sprzężenie, a $\mathbf{Alg}(\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma)$ będzie kategorią algebr Eilenberga-Moore'a dla tej monady. Czy funktor porównania $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma\colon \mathbf{UPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma)$ zgodny z odpowiednimi funktorami obu sprzężeń jest izomorfizmem?

   TAK. Nieformalnie, $\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$-algebry odzwierciedlają strukturę porządku na nośniku algebry (bo ich "nośniki" są w $\mathbf{POSet}^S$) i operacje (przez ewaluację termów, jak zwykle). Nieco formalniej: dla $A \in |\mathbf{UPAlg}(\Sigma)|$, $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \langle \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A), \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\varepsilon_A) \rangle$, gdzie $\varepsilon_A\colon \mathbf{F}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A)) \to A$ jest ko-jednością sprzężenia. Jeśli uporządkowane Σ-algebry A i A' mają różne nośniki lub mają takie same nośniki, ale różne porządki, to $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) \neq \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A')$. Jeśli zaś $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A')$ (a A i A' są różne) to dla pewnej operacji dla $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ i $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $f_A(a_1, \ldots, a_n) \neq f_{A'}(a_1, \ldots, a_n)$, więc $\varepsilon_A([f_A(a_1, \ldots, a_n)]_\sim) \neq \varepsilon_A([f_{A'}(a_1, \ldots, a_n)]_\sim)$ (notacja z konstrukcji w **UP**.6). Zatem $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ jest różnowartościowy (na obiektach — różnowartościowość na morfizmach jest oczywista, bo $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ nie zlepia różnych morfizmów).

   Niech teraz $\langle \langle X, \le_X \rangle, h\colon \mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\mathbf{F}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(\langle X, \le_X \rangle)) \to \langle X, \le_X \rangle \rangle$ będzie dowolną $\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$-algebrą. Niech $A \in |\mathbf{UPAlg}(\Sigma)|$ będzie uporządkowaną Σ-algebrą taką, że $\mathbf{G}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \langle X, \le_X \rangle$, a dla $f\colon s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ i $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $f_A(a_1, \ldots, a_n) = h([f_A(a_1, \ldots, a_n)]_\sim)$. Łatwo sprawdzić, że ε_A jest funkcją na $|\mathbf{F}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(X)|$ tożsamą z h, co pokazuje, że $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma(A) = \langle \langle X, \le_X \rangle, h \rangle$, więc $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ jest bijekcją na obiektach. Argument łatwo rozszerzyć na morfizmy $\mathbf{T}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$-algebr, co pokazuje, że $\mathbf{K}^{\mathbf{UP}}_\Sigma$ jest izomorfizmem.

Zadanie KUP:

1. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ jest

   (a) zupełna;

   NIE. Produkty w $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$ istnieją, dane są jako algebry produktowe z porządkiem po współrzędnych. W szczególności mamy produkt pustej rodziny, algebrę z jednoelementowymi nośnikami. Ale na ogół nie muszą istnieć equalizatory. Na przyklad, dla jednorodzajowej sygnatury bez operacji, niech f, g będa dwoma różnymi funkcjami z algebry (zbioru) jednoelementowej w algebrę dwuelementową z porządkiem liniowym. Ponieważ algebry w tej kategorii są niepuste (muszą mieć kres zbioru pustego), wiec nie istnieje morfizm, którego złożenia z f i g, odpowiednio, są tożsame.

(b) kozupełna.
NIE. Na przykład, nie ma tu na ogół obiektu początkowego. Znowu, dla sygnatury jednorodzajowej bez operacji, każda półhrata górna skończenie zupełna wklada sie na przynajmniej dwa różne sposoby w nią samą z dodanym nowym elementem najmniejszym (jeden to zwykle zanurzenie, drugi różni się od pierwszego tylko tym, że element najmniejszy jest odwzorowany na nowy element najmniejszy).

2. Kategoria $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   NIE, z **KUP**.1.a.
   (b) kozupełna.
   NIE, z **KUP**.1.b.
3. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE, z **KUP**.1.b: gdyby istniał lewy sprzężony, to obiekt wolny nad zbiorem pustym (wartość flewego sp[rzężonego na obiekcie początkowym w $\mathbf{Set}^S$) byłby obiektem początkowy w $\mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$.
4. Funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE, z **KUP**.3.
5. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE, z **KUP**.1.b, podobnie jak w **KUP**.3.
6. Funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma,\Phi} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony.
   NIE, z **KUP**.5.
7. Jeśli funktor $\mathbf{P}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony $\mathbf{L}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{Set}^S \to \mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$, to niech $\mathbf{M}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma}$ będzie monadą wyznaczoną przez to sprzężenie, a $\mathbf{Alg}(\mathbf{M}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma})$ będzie kategorią algebr Eilenberga-Moore'a dla tej monady. Czy funktor porównania $\mathbf{R}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\mathbf{M}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma})$ zgodny z odpowiednimi funktorami obu sprzężeń jest izomorfizmem?
   NIE DOTYCZY, z **KUP**.3.
8. Jeśli funktor $\mathbf{G}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{POSet}^S$ ma lewy sprzężony $\mathbf{F}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{POSet}^S \to \mathbf{KUPAlg}(\Sigma)$, to niech $\mathbf{T}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma}$ będzie monadą wyznaczoną przez to sprzężenie, a $\mathbf{Alg}(\mathbf{T}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma})$ będzie kategorią algebr Eilenberga-Moore'a dla tej monady. Czy funktor porównania $\mathbf{K}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma} \colon \mathbf{KUPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\mathbf{T}^{\mathbf{KUP}}_{\Sigma})$ zgodny z odpowiednimi funktorami obu sprzężeń jest izomorfizmem?
   NIE DOTYCZY, z **KUP**.5.