Egzamin z wykładu monograficznego

Podstawy algebry ogólnej i teorii kategorii
semestr zimowy 2008/09

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; poniżej wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Rozważmy dowolną sygnaturę $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$.

Kwitnąca Σ*-algebra* to dowolna Σ-algebra, której elementy mogą być pączkami, kwiatkami lub gałązkami, które mogą na sobie wzajemnie rosnąć. Ponadto, gałązki mogą być ucięte. To znaczy, w kwitnącej Σ-algebrze A, dla każdego elementu $a \in |A|_s$ nośnika algebry, zachodzi dokładnie jedna z trzech możliwości:

- albo a jest kwiatkiem, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{K}_A(a)$;
- albo a jest pączkiem, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{P}_A(a)$;
- albo a jest gałązką; wówczas a może też być ucięta, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{U}_A(a)$ (uwaga: ucięte mogą być tylko gałazki).

Ponadto, element a rodzaju s może rosnąć na pewnym elemencie a' tego samego rodzaju s, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{R}_A(a) = a'$. Wymagamy, by wszystkie kwiatki i pączki rosły na pewnych elementach (które nie muszą być gałązkami).

Σ-*homomorfizm kwitnących* Σ*-algebr* $h : A \to B$ to taki Σ-homomorfizm algebr $h : A \to B$, który przeprowadza kwiatki na kwiatki (tzn., jeśli $\mathcal{K}_A(a)$ to $\mathcal{K}_B(h(a))$), pączki na pączki lub kwiatki (tzn., jeśli $\mathcal{P}_A(a)$ to $\mathcal{P}_B(h(a))$ lub $\mathcal{K}_B(h(a))$), a gałązki na pączki, gałązki lub kwiatki — ale ucięte gałązki pozostają uciętymi gałązkami (tzn., $\mathcal{U}_A(a)$ implikuje $\mathcal{U}_B(h(a))$) — oraz zachowuje elementy, na których rosną kwiatki i pączki (tzn., $\mathcal{R}_A(a) = a'$ implikuje $\mathcal{R}_B(h(a)) = h(a')$).

Rozważamy Σ-formuły następującej postaci:

- $\forall X.(\mathcal{K}(T') \wedge \mathcal{P}(T'')) \Rightarrow \mathcal{K}(t)$;

gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, a T', T'' i $\{t\}$ są zbiorami Σ-termów ze zmiennymi z X. Gdy $T'' = \emptyset$ to formułę powyższej postaci nazywamy Σ-$\mathcal{K}$-formułą i zapisujemy jako $\forall X.\mathcal{K}(T') \Rightarrow \mathcal{K}(t)$.

Spełnianie Σ-formuł przez kwitnące Σ-algebry A definiujemy jak następuje:

- $A \models \forall X.(\mathcal{K}(T') \wedge \mathcal{P}(T'')) \Rightarrow \mathcal{K}(t)$ gdy $\mathcal{K}_A(t_A[v])$ (tzn., wartość $t_A[v]$ termu t w algebrze A przy wartościowaniu v jest kwiatkiem) dla każdego wartościowania zmiennych $v : X \to |A|$ takiego, że dla $t' \in T'$, $\mathcal{K}_A(t'_A[v])$ (tzn., $t'_A[v]$ jest kwiatkiem) oraz dla $t'' \in T''$, $\mathcal{P}_A(t''_A[v])$ (tzn., $t''_A[v]$ jest pączkiem).

Dla dowolnej sygnatury Σ i dowolnego zbioru Σ-formul Φ, definiujemy następujące kategorie:

- $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria wszystkich kwitnących Σ-algebr spełniających Φ, z homomorfizmami jak wyżej.
- $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — pełna podkategoria $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi)$ wyznaczona przez wszystkie kwitnące Σ-algebry bez uciętych gałązek.
- $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ — pełna podkategoria $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi)$ wyznaczona przez wszystkie kwitnące Σ-algebry, w których wszystkie elementy są nieuciętymi gałązkami, które nie rosną na niczym (czyli jest to pewna kategoria zwykłych Σ-algebr).

Pusty zbiór formuł w powyższych oznaczeniach pomijamy; zatem na przykład $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ jest kategorią wszystkich Σ-algebr (bez kwiatków, pączków i uciętych gałązek, gdzie zadna gałązka nie rośnie na niczym).

Rozważamy też następujące funktory:

- $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ — funktor, który zapomina o tym, że niektóre gałązki są ucięte.

- $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ — funktor, który zapomina o podziale elementów na kwiatki, pączki i gałązki, oraz o tym, że elementy mogą rosnąć jeden na drugim.

Zadanie:

Ze szkicem rozwiązań (mam nadzieję, że bez większych błędów :-)

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnej sygnatury Σ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

1. Kategoria $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma)$ jest

   (a) zupełna;

   (b) kozupełna.

   NIE: Niech Σ będzie sygnaturą ze stałą c, a A i B kwitnącymi Σ-algebrami takimi, że $\mathcal{K}_A(c_A)$ oraz $\mathcal{U}_B(c_B)$. Dla żadnej kwitnącej Σ-algebry C nie mogą istnieć jednocześnie Σ-homomorfizmy $h_1 : A \to C$ i $h_2 : B \to C$. Zatem w $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma)$ nie istnieje ani obiekt końcowy, ani koprodukt A i B.

2. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{K}$-formuł Φ, kategoria $\mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)$ jest

   (a) zupełna;

   TAK: Rozważmy w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)$ dowolny diagram D ze zbiorem wierzchołków N. Niech P z Σ-homomorfizmami $\pi_n : P \to \mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi}(D_n)$, $n \in N$, będzie granicą diagramu $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi}(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (ta granica istnieje na mocy faktu znanego z wykładu).

   Zdefiniujmy jak następuje kwitnącą Σ-algebrę $P^* \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma)|$ taką, że $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(P^*) = P$:

   - dla $a \in |P|$, $\mathcal{K}_{P^*}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{K}_{D_n}(\pi_n(a))$ dla wszystkich $n \in N$;
   - dla $a \in |P|$, $\mathcal{P}_{P^*}(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n \in N$, $\mathcal{K}_{D_n}(\pi_n(a))$ lub $\mathcal{P}_{D_n}(\pi_n(a))$, ale też dla pewnego $n \in N$ nie zachodzi $\mathcal{K}_{D_n}(\pi_n(a))$;
   - dla $a, a' \in |P|$, $\mathcal{R}_{P^*}(a) = a'$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla wszystkich $n \in N$, $\mathcal{R}_{D_n}(\pi_n(a)) = \pi_n(a')$.

   Wówczas, $\pi_n : P^* \to D_n$ są homomorfizmami kwitnących Σ-algebr i tworzą stożek w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$. Co więcej, dla dowolnej Σ-$\mathcal{K}$-formuły $\varphi \equiv \forall X.\mathcal{K}(T') \Rightarrow \mathcal{K}(t)$, jeśli dla wszystkich $n \in N$, $D_n \models \varphi$ to także $P^* \models \varphi$. Niech bowiem $v : X \to |P|$ i $\mathcal{K}_{P^*}(t'_P[v])$ dla $t' \in T'$. Wówczas dla wszystkich $n \in N$, $\mathcal{K}_{D_n}(\pi_n(t'_P[v]))$ i $\mathcal{K}_{D_n}(t'_P[v;\pi_n])$ (bo oczywiście $\pi_n(t'_P[v]) = t'_P[v;\pi_n]$), wiec także $\mathcal{K}_{D_n}(t_P[v;\pi_n])$ i $\mathcal{K}_{D_n}(\pi_n(t_P[v]))$ (bo $\pi_n(t_P[v]) = t_P[v;\pi_n]$), i dalej, z definicji P^*, $\mathcal{K}_{P^*}(t_P[v])$. Zatem, $P^* \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)|$.

   Łatwo sprawdzić, że stożek $\pi_n : P^* \to D_n$, $n \in N$, jest granicą D w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)$: dla dowolnego stożka $h_n : Q \to D_n$, $n \in N$, nad D w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)$, jedyny Σ-homomorfizm $k : \mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi}(Q) \to P$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ taki, że dla $n \in N$, $k;\pi_n = h_n$, jest też (jedynym) homomorfizmem kwitnących Σ-algebr $k : Q \to P^*$ o tej własności.

   (b) kozupełna.

   TAK: Najpierw pokażemy kozupełność $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ (czyli dla przypadku $\Phi = \emptyset$).

   Rozważmy w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ dowolny diagram D ze zbiorem wierzchołków N. Niech C z Σ-homomorfizmami $\iota_n : \mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(D_n) \to C$, $n \in N$, będzie kogranicą diagramu $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(D)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ (ta kogranica istnieje na mocy faktu znanego z wykładu).

   Niech teraz $\approx$ będzie najmniejszą kongruencją na C taką, że dla wszystkich $n_1, n_2 \in N$, $a_1, a'_1 \in |D_{n_1}|$ takich, że $\mathcal{R}_{D_{n_1}}(a_1) = a'_1$, oraz $a_2, a'_2 \in |D_{n_2}|$ takich, że $\mathcal{R}_{D_{n_2}}(a_2) = a'_2$, jeśli $\iota_{n_1}(a_1) \approx \iota_{n_2}(a_2)$ to $\iota_{n_1}(a'_1) \approx \iota_{n_2}(a'_2)$. Niech $C/{\approx}$ będzie algebrą ilorazową, a dla $n \in N$, niech $\iota'_n : D_n \to C/{\approx}$ będzie złożeniem ι_n z naturalnym homomorfizmem ilorazowym $[\_]_\approx : C \to C/{\approx}$.

   Zdefiniujmy jak następuje kwitnącą Σ-algebrę $C^* \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma)|$ taką, że $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(C^*) = C/{\approx}$. Najpierw zdefiniujmy dwa (wielorodzajowe) podzbiory $K \subseteq |C/{\approx}|$ i $KP \subseteq |C/{\approx}|$:

   - $K = \{[\iota_n(a)]_\approx \mid n \in N, a \in |D_n| \text{ i } \mathcal{K}_{D_n}(a)\}$

- $KP = \{[\iota_n(a)]_\approx \mid n \in N, a \in |D_n| \text{ i } (\mathcal{P}_{D_n}(a) \text{ lub } \mathcal{K}_{D_n}(a))\}$.

Definiujemy teraz:

- dla $a \in |C|$, $\mathcal{K}_{C^*}([a]_\approx)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a]_\approx \in K$;
- dla $a \in |C|$, $\mathcal{P}_{C^*}([a]_\approx)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $[a]_\approx \in KP$, ale $[a]_\approx \notin K$;
- dla $a, a' \in |C|$, $\mathcal{R}_{C^*}([a]_\approx) = [a']_\approx$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $n \in N$, oraz $a_n, a'_n \in |D_n|$ zachodzi $\mathcal{R}_{D_n}(a_n) = a'_n$ oraz $\iota_n(a_n) \approx a$ i $\iota_n(a'_n) \approx a'$.

UWAGA: łatwo sprawdzić, że jeśli $[a]_\approx$ jest w C^* kwiatkiem lub pączkiem, to na czymś rośnie.

Teraz, $\iota'_n\colon D_n \to C^*$, $n \in N$, są homomorfizmami kwitnących Σ-algebr i tworzą kostożek w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$.

Łatwo sprawdzić, że kostożek $\iota'_n\colon D_n \to P^*$, $n \in N$, jest kogranicą D w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$: dla dowolnego kostożka $h_n\colon D_n \to Q$, $n \in N$, nad D w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$, jedyny Σ-homomorfizm $k\colon C \to \mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(Q)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ taki, że dla $n \in N$, $\iota_n;k = h_n$ ma jądro zawierające $\approx$. Istnieje zatem jedyny Σ-homomorfizm $k'\colon C/{\approx} \to \mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi}(Q)$ taki, że $[\_]_\approx;k' = k$. Co więcej, $k'\colon C^* \to Q$ jest homomorfizmem kwitnących Σ-algebr. Zachodzi też $\iota'_n;k' = \iota_n;k = h_n$, dla $n \in N$ — i k' jest jedynym homomorfizmem kwitnących Σ-algebr o tej własności.

Zatem $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ jest kozupełna.

Dalej, skorzystajmy z faktu w dowodzonego poniżej: inkluzja $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ ma lewy sprzężony $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$, przy czem złożenie $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi};\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}$ jest identycznością na $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$. Teraz, ponieważ lewe sprzężone zachowują kogranice, kogranicą dowolnego diagramu w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest obraz względem $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}$ jego kogranicy w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ — co dowodzi kozupełności $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$.

3. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, kategoria $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest

(a) zupełna;

NIE: Niech Σ będzie sygnaturą ze stałymi a, b, c. Rozpatrzmy Σ-formułę $\varphi \equiv \mathcal{K}(a) \wedge \mathcal{P}(b) \Rightarrow \mathcal{K}(c)$ (przy oczywistych konwencjach notacyjnych dla pustych i singletonowych zbiorów zmiennych i termów). Niech A, B, C, D będą kwitnącymi Σ-algebrami takimi, że:

- $\mathcal{K}_A(a_A)$, $\mathcal{P}_A(b_A)$ i $\mathcal{K}_A(c_A)$,
- $\mathcal{K}_B(a_B)$, $\mathcal{K}_B(b_B)$ i c_B jest gałązką w B,
- $\mathcal{P}_C(b_C)$, a_C i c_C są gałązkami w C,
- $\mathcal{K}_D(a_D)$, b_D i c_D są gałązkami w D

oraz istnieją homomorfizmy kwitnących Σ-algebr $h_1\colon C \to A$ i $h_2\colon C \to B$ oraz $h'_1\colon D \to A$ i $h'_2\colon D \to B$.[1] Wówczas $A, B, C, D \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \{\varphi\})|$. W $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \{\varphi\})$ nie istnieje produkt A i B: gdyby bowiem P z homomorfizmami $\pi_1\colon P \to A$ i $\pi_2\colon P \to B$ był takim produktem, to istniałyby homomorfizmy kwitnących Σ-algebr $k\colon C \to P$ oraz $k'\colon D \to P$, i wówczas w P:

- a_P jest kwiatkiem (bo k' jest homomorfizmem kwitnących algebr)
- b_P jest pączkiem (bo k i π_1 są homomorfizmami kwitnących algebr)
- c_P jest gałązką (bo π_2 jest homomorfizmem kwitnących algebr).

Zatem $P \not\models \varphi$ — sprzeczność.

(b) kozupełna.

NIE: Niech Σ będzie sygnaturą ze stałymi a, b, c. Rozpatrzmy Σ-formułę $\varphi \equiv \mathcal{P}(a) \wedge \mathcal{P}(b) \Rightarrow \mathcal{K}(c)$. Niech A, B, C, D będą kwitnącymi Σ-algebrami takimi, że:

- $\mathcal{P}_A(a_A)$, b_A i c_A są gałązkami w A,
- $\mathcal{P}_B(b_B)$, a_B i c_B są gałązkami w B,

[1] Takie algebry zawsze można skonstruować. Na potrzeby tych kontrprzykładów można przyjąć, że sygnatura Σ jest jednorodzajowa i nie zawiera innych operacji niż wymienione stałe, a algebry mają nośniki trzyelementowe, złożone ze wzajemnie różnych wartości tych stałych, z których każda rośnie na niej samej.

- $\mathcal{P}_C(a_C)$, $\mathcal{K}_C(b_C)$ i c_C jest gałązką w C,
- $\mathcal{K}_D(a_D)$, $\mathcal{P}_D(b_D)$ i c_D jest gałązką w D,

oraz istnieją Σ-homomorfizmy kwitnących algebr $h_1\colon A \to C$ i $h_2\colon B \to C$ oraz $h'_1\colon A \to D$ i $h'_2\colon B \to D$.[1] Wówczas $A, B, C, D \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \{\varphi\})|$. W $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \{\varphi\})$ nie istnieje koprodukt A i B: gdyby bowiem P z homomorfizmami $\iota_1\colon A \to P$ i $\iota_2\colon B \to A$ był takim koproduktem, to istniałyby homomorfizmy kwitnących Σ-algebr $k\colon P \to C$ oraz $k'\colon P \to D$, i wówczas w P:

- $\mathcal{P}_P(a_P)$ (bo ι_1 i k są homomorfizmami kwitnących algebr)
- $\mathcal{P}_P(b_P)$ (bo ι_2 i k' są homomorfizmami kwitnących algebr)
- c_P jest gałązką (bo k jest homomorfizmem kwitnących algebr).

Zatem $P \not\models \varphi$ — sprzeczność.

4. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, kategoria $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ jest

   (a) zupełna;

   (b) kozupełna.

   NIE: Niech Σ będzie sygnaturą ze stałą c, a Φ niech zawiera formułę $\mathcal{K}(c)$ (przy oczywistych konwencjach notacyjnych dla formuł z pustymi zbiorami zmiennych i termów). Wówczas $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ jest kategorią pustą, w szczególności nie ma w niej ani obiektu końcowego, ani początkowego.

5. Funktor $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ ma

   (a) lewy sprzężony;

   TAK: Lewym sprzężonym do $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}$ jest funktor $\mathcal{N}_\Sigma\colon \mathbf{Alg}(\Sigma) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$, który każdą Σ-algebrę A czyni kwitnącą Σ-algebrą $\mathcal{N}_\Sigma(A)$, uznając wszystkie jej elementy za gałązki, które na niczym nie rosną. Jednością jest rodzina homomorfizmów identycznościowych. Jeśli bowiem $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$, $B \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma)|$ i $h\colon A \to \mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(B)$ w $\mathbf{Alg}(\Sigma)$, to także $h\colon \mathcal{N}_\Sigma(A) \to B$ w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$, i oczywiście jest to jedyny morfizm w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ taki, że $id_A;h = h$.

   (b) prawy sprzężony.

   NIE: $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}$ nie zachowuje kogranic, patrz konstrukcja kogranic w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ powyżej.

6. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{K}$-formuł Φ, funktor $\mathcal{Z}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ ma

   (a) lewy sprzężony;

   TAK: Funktor $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ ma lewy sprzężony (patrz powyżej). Wystarczy zatem pokazać, że inkluzja $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ też ma lewy sprzężony $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$.

   Niech $A \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma)|$. Niech Σ^+ będzie sygnaturą algebraiczną powstałą przez dodanie do Σ symboli funkcyjnych $\mathcal{R}_s\colon s \to s$, dla każdego rodzaju s w Σ. Rozpatrzmy algebrę Σ^+-termów z elementami A jako zmiennymi, $\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)$. Niech (wielorodzajowa) relacja $\approx \subseteq |\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)| \times |\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)|$ i (wielorodzajowe) zbiory $K, KP \subseteq |\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)|$ będą najmniejsze takie, że:[2]

   - $a \approx a$ dla $a \in |A|$,
   - $\approx$ jest symetryczna i przechodnia,
   - $\approx$ jest congruentna względem operacji w Σ,
   - jeśli $t \approx t'$ i $\mathcal{R}(t) \approx \mathcal{R}(t)$ to $\mathcal{R}(t) \approx \mathcal{R}(t')$,
   - dla każdej n-argumentowej operacji f w Σ oraz $a_1, \ldots, a_n \in |A|$ (odpowiednich rodzajów), $f_A(a_1, \ldots, a_n) \approx f(a_1, \ldots, a_n)$,
   - dla $a, a' \in |A|$ takich, że $\mathcal{R}_A(a) = a'$, $\mathcal{R}(a) \approx a'$,
   - dla $a \in |A|$ takich, że $\mathcal{K}_A(a)$, $a \in K$,

[2] Dla czytelności pomijam indeksy wskazujące rodzaje.

- dla $a \in |A|$ takich, że $\mathcal{P}_A(a)$, $a \in KP$,
- $K \subseteq KP$,
- dla każdej Σ-$\mathcal{K}$-formuły $\forall X.\mathcal{K}(T') \Rightarrow \mathcal{K}(t)$ w Φ, dla każdego wartościowania $v: X \to |\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)|$, jeśli $t'_{\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)}[v] \in K$ dla wszystkich $t' \in T'$ to także $t_{\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)}[v] \in K$,
- jeśli $t \in KP$ to $\mathcal{R}(t) \approx \mathcal{R}(t)$.

Niech teraz D będzie Σ-algebrą Σ^+-termów o nośniku $|D| = \{t \mid t \approx t\} \subseteq |\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)|$ (zbiór ten jest zamkniety ze względu na operacje w Σ). Relacja $\approx$ jest kongruencją na D. Niech $D/{\approx}$ będzie Σ-algebrą ilorazową.

Zdefinujmy jak następuje kwitnącą Σ-algebrę $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$ taką, że $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)) = D/{\approx}$:

- dla $t \in D$, $\mathcal{K}_{\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)}([t]_\approx)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t' \in K$ dla pewnego $t' \in D$ takiego, że $t' \approx t$;
- dla $t \in D$, $\mathcal{P}_{\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)}([t]_\approx)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $t' \in KP$ dla pewnego $t' \in D$ takiego, że $t' \approx t$, ale dla żadnego takiego t' nie zachodzi $t' \in K$;
- dla $t, t' \in D$, $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)}([t]_\approx) = [t']_\approx$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego t_0 takiego, że $t_0 \approx t$, $\mathcal{R}(t_0) \approx t'$.

Po pierwsze, zauważmy, że $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$ jest dobrze zdefiniowaną kwitnącą Σ-algebrą, która spełnia wszystkie formuły w Φ. Dalej, ponieważ łatwo sprawdzić, że $\approx$ jest identycznością na $|A|$ to bez zmniejszania ogólności (z dokładnością do izomorfizmu) dla $a \in |A|$ możemy utożsamiać a z $[a]_\approx$; w szczególności, $\mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(A)$ jest wówczas podalgebrą $D/{\approx}$. Niech $\eta_A: \mathcal{Z}_{\Sigma,\emptyset}(A) \to D/{\approx}$ będzie inkluzją. Łatwo sprawdzić z definicji $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$, że $\eta_A: A \to \mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$ jest homomorfizmem w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$. Zauważmy jeszcze, że jeśli A spełnia wszystkie formuły w Φ, to η_A jest identycznością kwitnących Σ-algebr.

Teraz: $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$ z jednością $\eta_A: A \to \mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A)$ jest obiektem wolnym nad A względem funktora $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$. Niech bowiem $B \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)|$ i niech $h: A \to B$ będzie homomorfizmem kwitnących Σ-algebr. W naturalny sposób B daje częściową Σ^+-algebrę B^+, gdzie wszystkie operacje z Σ są zdefiniowane jak w B, a operacje $\mathcal{R}$ są zdefiniowane zgodnie z funkcją "rośnie na" w kwitnącej algebrze B. Przez indukcję względem definicji $|D|$, $\approx$, K i KP w $\mathcal{T}_{\Sigma^+}(|A|)$ łatwo pokazać, że:

- dla $t \in |D|$, $t_{B^+}[h]$, wartość termu t w algebrze częściowej B^+ przy wartościowaniu "zmiennych" $h: |A| \to |B|$, jest określona;
- dla $t, t' \in |D|$, jeśli $t \approx t'$ to $t_{B^+}[h] = t'_{B^+}[h]$;
- dla $t \in |D|$, jeśli $t \in K$ to $\mathcal{K}_B(t_{B^+}[h])$;
- dla $t \in |D|$, jeśli $t \in KP$ to $\mathcal{K}_B(t_{B^+}[h])$ lub $\mathcal{P}_B(t_{B^+}[h])$.

Z tego już wynika, że homomorfizm $h: A \to B$ rozszerza się jednoznacznie do homomorfizmu $h^\sharp: \mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(A) \to B$ takiego, że $\eta_A;h^\sharp = h$, co kończy dowod.

(b) prawy sprzężony.

NIE: patrz argument powyżej dla szczególnego przypadku ($\Phi = \emptyset$).

7. Funktor $\mathcal{G}_{\Sigma,\emptyset}: \mathbf{KPUAlg}(\Sigma) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ ma

(a) lewy sprzężony;

TAK: Funktor inkluzji $\mathcal{J}_\Sigma: \mathbf{KPAlg}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbf{KPUAlg}(\Sigma)$ jest lewym sprzężonym do $\mathcal{G}_{\Sigma,\emptyset}$, z jednością, która jest rodziną homomorfizmów identycznościowych. Niech bowiem $A \in |\mathbf{KPAlg}(\Sigma)|$, $B \in |\mathbf{KPUAlg}(\Sigma)|$ i $h: A \to \mathcal{G}_{\Sigma,\emptyset}(B)$ w $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$. Wówczas także $h: A \to B$ w $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma)$, i oczywiście jest to jedyny morfizm w $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma)$ taki, że $id_A;\mathcal{G}_{\Sigma,\emptyset}(h) = h$.

UWAGA: Tak samo: dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, funktor $\mathcal{G}'_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi)$, który zapomina o tym, że niektore gałązki są ułamane, ma lewy sprzężony, który jest funktorem inkluzji $\mathcal{J}_{\Sigma,\Phi}: \mathbf{KPAlg}(\Sigma, \Phi) \hookrightarrow \mathbf{KPUAlg}(\Sigma, \Phi)$.

(b) prawy sprzężony.

NIE: Gdyby istniał prawy sprzężony do $\mathcal{G}_{\Sigma,\emptyset}$, to zachowywałby on granice, więc ponieważ $\mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ jest zupełna (patrz powyżej), to istniałby obiekt końcowy w $\mathbf{KPUAlg}(\Sigma,\emptyset)$ — a nie istnieje, patrz powyżej.

8. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{K}$-formuł Φ, funktor $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPUAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ ma

(a) lewy sprzężony;

TAK: Przedstawmy $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi}$ jako złożenie $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi} = \mathcal{G}'_{\Sigma,\Phi};\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$, gdzie $\mathcal{G}'_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPUAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi)$ został zdefiniowany powyżej, a $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}\colon \mathbf{KPAlg}(\Sigma,\Phi) \to \mathbf{KPAlg}(\Sigma)$ jest funktorem inkluzji. Ponieważ $\mathcal{G}'_{\Sigma,\Phi}$ i $\mathcal{I}_{\Sigma,\Phi}$ mają lewe sprzężone (patrz powyżej) to i ich złożenie ma lewy sprzężony.

(b) prawy sprzężony.

NIE: patrz szczególny przypadek ($\Phi = \emptyset$) powyzej.