Egzamin z wykładu monograficznego

Podstawy algebry ogólnej i teorii kategorii
semestr zimowy 2005/06

Pojęcia, terminologia i notacja:

Przyjmujemy zwykłą definicję sygnatury algebraicznej Σ, Σ-algebry i Σ-homomorfizmu; poniżej wykorzystujemy standardową notację z wykładu.

Rozważmy dowolną sygnaturę $\Sigma = \langle S, \Omega \rangle$.

Głośna Σ-algebra to dowolna Σ-algebra, gdzie do każdego elementu może być doczepiony albo dzwonek, albo gwizdek. Ponadto, od każdego dzwonka może prowadzić sznurek do elementu nośnika algebry tego samego rodzaju, co element, do którego doczepiony jest dzwonek. To znaczy, w głośnej Σ-algebrze A, dla każdego elementu $a \in |A|_s$ nośnika algebry, zachodzi jedna z trzech możliwości:

- albo do a doczepiony jest dzwonek, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{B}_A(a)$, i wówczas możliwe są dwa dalsze przypadki:
  - albo prowadzi od niego sznurek do elementu $a' \in |A|_s$ nośnika tego samego rodzaju, co zapisywać będziemy jako $\mathcal{P}_A(a) = a'$;
  - albo nie prowadzi od niego żaden sznurek;
- albo do a doczepiony jest gwizdek, co będziemy zapisywać jako $\mathcal{W}_A(a)$;
- albo nic nie jest do a doczepione.

Σ-homomorfizm głośnych Σ-algebr $h : A \to B$ to taki Σ-homomorfizm algebr $h : A \to B$, który przeprowadza elementy z doczepionymi dzwonkami na elementy z doczepionymi dzwonkami (tzn., $\mathcal{B}_A(a)$ implikuje $\mathcal{B}_B(h(a))$), a elementy z doczepionymi gwizdkami na elementy z doczepionymi gwizdkami (tzn., $\mathcal{W}_A(a)$ implikuje $\mathcal{W}_B(h(a))$), oraz zachowuje połączenia sznurkami (tzn., $\mathcal{P}_A(a) = a'$ implikuje $\mathcal{P}_B(h(a)) = h(a')$).

Rozważamy Σ-formuły następujących postaci:

- Σ-$\mathcal{B}$-formuły: $\forall X.\mathcal{B}(X') \Rightarrow \mathcal{B}(t)$;
- Σ-$\mathcal{P}$-formuły: $\forall X.\mathcal{B}(X') \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}(t))$,

gdzie X jest S-rodzajowym zbiorem zmiennych, X' jego S-rodzajowym podzbiorem, a t jest Σ-termem ze zmiennymi z X.

Spełnianie Σ-formuł przez głośne Σ-algebry A definiujemy jak następuje:

- $A \models \forall X.\mathcal{B}(X') \Rightarrow \mathcal{B}(t)$ gdy dla każdego wartościowania zmiennych $v : X \to |A|$ takiego, że dla $x \in X'$, $\mathcal{B}_A(v(x))$ (tzn., $v(x)$ ma doczepiony dzwonek), zachodzi też $\mathcal{B}_A(t_A[v])$ (tzn., wartość $t_A[v]$ termu t w algebrze A przy wartościowaniu v ma doczepiony dzwonek);
- $A \models \forall X.\mathcal{B}(X') \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}(t))$ gdy dla każdego wartościowania zmiennych $v : X \to |A|$ takiego, że dla $x \in X'$, $\mathcal{B}_A(v(x))$ (tzn., $v(x)$ ma doczepiony dzwonek), zachodzi też $\mathcal{B}_A(t_A[v])$ oraz dla pewnego $a' \in |A|$, $\mathcal{B}_A(a')$ i $\mathcal{P}_A(t_A[v]) = a'$ (tzn., wartość $t_A[v]$ termu t w algebrze A przy wartościowaniu v ma doczepiony dzwonek i prowadzi od niego sznurek do elementu, który też ma doczepiony dzwonek).

Dla dowolnej sygnatury Σ i zbioru Σ-formul Φ, definiujemy następujące kategorie:

- $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi)$ — kategoria wszystkich głośnych Σ-algebr spełniających Φ, z homomorfizmami jak wyżej.
- $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ — pełna podkategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi)$ wyznaczona przez wszystkie głośne Σ-algebry bez gwizdków.
- $\mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi)$ — pełna podkategoria $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ wyznaczona przez wszystkie głośne Σ-algebry bez sznurków.
- $\mathbf{Alg}(\Sigma, \Phi)$ — pełna podkategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi)$ wyznaczona przez wszystkie głośne Σ-algebry bez dzwonków, gwizdków i sznurków (czyli jest to pewna kategoria zwykłych Σ-algebr).

Pusty zbiór formuł w powyższych oznaczeniach pomijamy; zatem na przykład $\mathbf{Alg}(\Sigma)$ jest kategorią wszystkich Σ-algebr (bez dzwonków, gwizdków i sznurków).

Rozważamy też następujące funktory:

- $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$ — funktor, który zapomina o doczepionych gwizdkach.
- $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ — funktor, który zapomina o doczepionych dzwonkach i sznurkach.

Zadanie:

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnej sygnatury Σ? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

1. Kategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
2. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, kategoria $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
3. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{B}$-formuł Φ, kategoria $\mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest
   (a) zupełna;
   (b) kozupełna.
4. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{B}$-formuł Φ, funktor $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ ma
   (a) lewy sprzężony;
   (b) prawy sprzężony.
5. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, funktor $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$ ma
   (a) lewy sprzężony;
   (b) prawy sprzężony.
6. Funktor $\mathcal{F}_{\Sigma,\emptyset} : \mathbf{BPWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$ ma
   (a) lewy sprzężony;
   (b) prawy sprzężony.
7. Kategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ ma epimorficzno-monomorficzny system podziału.

Szkic rozwiązań: *(Mam nadzieję, że bez większych błędów :-)*

1. Niech sygnatura Σ zawiera stałą c. Istnieją głośne Σ-algebry A i B takie, że $\mathcal{B}_A(c_a)$ oraz $\mathcal{W}_B(c_B)$. Nie istnieje głośna Σ-algebra C z Σ-homomorfizmami głośnych Σ-algebr $h_A : A \to C$ i $h_B : B \to C$. Zatem:

   (a) Kategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ nie jest zupełna, bo nie istnieje w niej obiekt końcowy. (Uwaga: granice niepustych diagramów w niej istnieją i można je skonstruować w standardowy sposób.)

   (b) Kategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ nie jest kozupełna, bo nie istnieje w niej koprodukt A i B.

2. Niech $\Sigma = \langle S, \Omega\rangle$. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, rozpatrzmy dwa Σ-homomorfizmy $g, h : A \to B$ w $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ i rodzinę algebr $A_i \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$, $i \in \mathcal{I}$.

   (a) Kategoria $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest zupełna; wystarczy pokazać istnienie equalizatora $e : E \to A$ homomorfizmów g, h i produktu $P \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$ rodziny $\langle A_i\rangle_{i\in\mathcal{I}}$:

   - Definiujemy nośnik $|E| = \{a \in |A| \mid g(a) = h(a)\}$. Operacje w E są określone tak, jak w A (wyniki należą do $|E|$, bo g i h to Σ-homomorfizmy). Dla $a \in |E|$, $\mathcal{B}_E(a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}_A(a)$. Dla $a \in |E|$ i $a' \in |A|$, $\mathcal{P}_E(a) = a'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}_A(a) = a'$ (to jest dobrze określone, bo jeśli $\mathcal{P}_A(a) = a'$ to $a' \in |E|$, bo g i h to Σ-homomorfizmy głośnych algebr). Teraz łatwo sprawdzić, że:
     - $E \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$, gdy $A \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$,
     - inkluzja $e : |E| \to |A|$ jest Σ-homomorfizmem głośnych algebr $e : E \to A$,
     - $e : E \to A$ jest equalizatorem g i h w $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$.
   - Nośnik $|P| = \{f : \mathcal{I} \to \bigcup_{i\in\mathcal{I}} |A_i| \mid f(i) \in |A_i| \text{ dla } i \in \mathcal{I}|\}$ jest produktem nośników algebr rodziny $\langle A_i\rangle_{i\in\mathcal{I}}$. Operacje z Σ zdefiniowane są po współrzędnych, jak zwykle. Dla $f \in |P|$, $\mathcal{B}_P(f)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}_{A_i}(f(i))$ dla wszystkich $i \in \mathcal{I}$. Dla $f, f' \in |P|$, $\mathcal{P}_P(f) = f'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}_{A_i}(f(i)) = f'(i)$ dla wszystkich $i \in \mathcal{I}$.
     Łatwo teraz sprawdzić, że:
     - $P \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$, gdy $A_i \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$ dla wszystkich $i \in \mathcal{I}$,
     - dla $i \in \mathcal{I}$, $\pi_i : P \to A_i$ zadane przez $\pi(f) = f(i)$, dla $f \in |P|$, są Σ-homomorfizmami głośnych Σ-algebr,
     - P z rzutowaniami π_i jest produktem rodziny $\langle A_i\rangle_{i\in\mathcal{I}}$.

   (b) Kategoria $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest kozupełna; wystarczy pokazać istnienie koproduktu $C \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$ rodziny $\langle A_i\rangle_{i\in\mathcal{I}}$ i koequalizatora $k : B \to K$ homomorfizmów g, h.

   Pomocnicze pojęcie: Dla dowolnej głośnej Σ-algebry $D \in |\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)|$, *głośna kongruencja* na D to taka Σ-kongruencja $\cong$ na D, która dodatkowo spełnia następujący warunek: dla $d, d', e, e' \in D$, jeśli $\mathcal{P}_D(d) = d'$, $\mathcal{P}_D(e) = e'$ oraz $d \cong e$ to $d' \cong e'$. Algebra ilorazowa $D/\cong$ jest wówczas zdefiniowana jak zwykle, przy czym: $\mathcal{B}_{D/\cong}([d]_\cong)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{B}_D(d')$ dla pewnego $d' \cong d$, oraz $\mathcal{P}_{D/\cong}([d]_\cong) = [e]_\cong$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{P}_D(d') = e'$ dla pewnych $d' \cong d$ i $e' \cong e$ (to jest dobrze określone na mocy definicji głośnej kongruencji). Zauważmy, że dla dowolnej Σ-formuły ϕ rozważanych postaci, jeśli $D \models \phi$ to także $D/\cong \models \phi$. Łatwo też sprawdzić, że dla każdej relacji na $|D|$ istnieje najmniejsza głośna kongruencja na D zawierająca tę relację. Co więcej, jądro każdego homomorfizmu głośnych algebr jest głośną kongruencją. Dalej, naturalna funkcja $[\_]_\cong : D \to D/\cong$ jest homomorfizmem głośnych algebr. W końcu, mając dany homomorfizm głośnych algebr $l : D \to D'$, jeśli jądro l zawiera $\cong$, to funkcja $j([d]_\cong) = l(d)$ określa homomorfizm głośnych algebr $j : D/\cong \to D'$.

- Niech $\cong$ będzie najmniejszą głośną kongruencją na B taką, że $g(a) \cong h(a)$ dla wszystkich $a \in |A|$. Niech $K = B/\cong$, a $k : B \to K$ będzie naturalnym głośnym homomorfizmem takim, że $k(b) = [b]_{\cong}$. Łatwo teraz sprawdzić, że:
  - $K \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$, gdy $B \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$,
  - $k : B \to K$ jest koequalizatorem g i h w $\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$.
- Dla dowolnego S-rodzajowego zbioru X oraz jego podzbiorów $\mathcal{X}_P \subseteq \mathcal{X}_B \subseteq X$, zdefiniujmy następującą głośną algebrę $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X) \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$. Rozpatrzmy zbiór $T_{\Sigma^+}(X)$ wszystkich Σ^+-termów ze zmiennymi X, gdzie Σ^+ jest sygnaturą Σ z dodatkową (nową) operacją $p : s \to s$, dla każdego rodzaju s w Σ. Niech $\mathcal{B}$, $\mathcal{P}$ i F będą najmniejszymi (S-rodzajowymi) podzbiorami $T_{\Sigma^+}(X)$ takimi, że:
  - $X \subseteq F$;
  - $\mathcal{X}_B \subseteq \mathcal{B}$;
  - $\mathcal{X}_P \subseteq \mathcal{P}$;
  - dla każdego $t \in \mathcal{P}$, $p(t) \in F$;
  - dla każdej Σ-operacji $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ i $t_1 \in F_{s_1}, \ldots, t_n \in F_{s_n}$, $f(t_1, \ldots, t_n) \in F_s$;
  - dla każdej formuły $\forall Y.\mathcal{B}(Y') \Rightarrow \mathcal{B}(t)$ w Φ i każdego wartościowania $v : Y \to F$, jeśli $v(y) \in \mathcal{B}$ dla wszystkich $y \in Y'$, to także $t[v] \in \mathcal{B}$, gdzie $t[v]$ jest termem t, w którym za każdą zmienną $y \in Y$ wstawiono term $v(y)$;
  - dla każdej formuły $\forall Y.\mathcal{B}(Y') \Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{P}(t))$ w Φ i każdego wartościowania $v : Y \to F$, jeśli $v(y) \in \mathcal{B}$ dla wszystkich $y \in Y'$, to także $t[v] \in \mathcal{B}$, $t[v] \in \mathcal{P}$ oraz $p(t[v]) \in \mathcal{B}$, gdzie $t[v]$ jest termem t, w którym za każdą zmienną $y \in Y$ wstawiono term $v(y)$.

  (Łatwo sprawdzić, że istnieją najmniejsze zbiory spełniające te własności, oraz $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B} \subseteq F$.) $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)$ jest głośną algebrą o nośniku F, z dzwonkami doczepionymi do elementów w $\mathcal{B}$ i ze sznurkami doczepionymi do elementów $t \in \mathcal{P}$, przy czym wówczas $\mathcal{P}_{F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)}(t) = p(t)$.

  Łatwo sprawdzić, że $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X) \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$, oraz dla każdej głośnej algebry $A \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)|$ i funkcji $v : X \to |A|$ takiej, że $\mathcal{B}_A(v(x))$ dla każdego $x \in \mathcal{X}_B$ oraz dla każdego $x \in \mathcal{X}_P$, $\mathcal{P}_A(v(x)) = a'$ dla pewnego $a' \in |A|$, istnieje dokładnie jeden homomorfizm głośnych algebr $v^{\#} : F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X) \to A$, który rozszerza v.

  Teraz, dla rodziny głośnych Σ-algebr $\langle A_i \rangle_{i \in \mathcal{I}}$, niech $X = \{\langle a, i \rangle \mid i \in \mathcal{I}, a \in |A_i|\}$ będzie sumą rozłączną nośników algebr $|A_i|$, $i \in \mathcal{I}$; niech $\mathcal{X}_B = \{\langle a, i \rangle \mid i \in \mathcal{I}, a \in |A_i|, \mathcal{B}_{A_i}(a)\}$ będzie jego podzbiorem złożonym z tych elementów, do których są doczepione dzwonki; podobnie, niech $\mathcal{X}_P = \{\langle a, i \rangle \mid i \in \mathcal{I}, a \in |A_i|, \mathcal{P}_{A_i}(a) = a'$ dla pewnego $a' \in |A_i|\}$.

  Niech $\cong$ będzie najmniejszą głośną kongruencją na $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)$ taką, że:
  - dla każdej Σ-operacji $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, $i \in \mathcal{I}$ oraz $a_1 \in |A_i|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A_i|_{s_n}$, zachodzi $f(\langle a_1, i \rangle, \ldots, \langle a_n, i \rangle) \cong \langle f_{A_i}(a_1, \ldots, a_n), i \rangle$;
  - dla $i \in \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{P}_{A_i}(a) = a'$, $p(\langle a, i \rangle) \cong \langle a', i \rangle$.

  Zdefiniujmy C jako algebrę ilorazową $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)/\cong$. Łatwo teraz sprawdzić, że:
  - $C \in \mathbf{BPAlg}(\Sigma, \Phi)$;
  - dla $i \in \mathcal{I}$, $\iota_i(a) = [a]_{\cong}$ dla $a \in |A_i|$ definiuje homomorfizm głośnych algebr $\iota_i : A_i \to C$,
  - C z rodziną włożeń $\iota_i : A_i \to C$, $i \in \mathcal{I}$, jest koproduktem rodziny A_i, $i \in \mathcal{I}$.

3. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{B}$-formuł Φ, kategoria $\mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest zupełna i kozupełna — wystarczy sprawdzić, że $\mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi)$ jest zamknięta na konstrukcje equalizatorów, produktów, koequalizatorów i koproduktów zdefiniowane w rozwiązaniu zadania 2 powyżej.

4. Dla dowolnego zbioru Σ-$\mathcal{B}$-formuł Φ, funktor $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{Alg}(\Sigma)$ ma

   (a) lewy sprzężony: wystarczy sprawdzić, że konstrukcja obiektu wolnego nad algebrą $A \in \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$ w rozwiązaniu zadania 5 poniżej daje algebrę w $\mathbf{BAlg}(\Sigma, \Phi)$, o ile $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$ i Φ jest zbiorem Σ-$\mathcal{B}$-formuł.

   W tym wypadku, konstrukcja upraszcza się znacznie: dla dowolnej algebry $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$, niech $\mathcal{B} \subseteq |A|$ będzie najmniejszym zbiorem takim, że dla każdej formuły $\forall Y.\mathcal{B}(Y') \Rightarrow \mathcal{B}(t)$ i wartościowania $v : Y \to |A|$ takiego, że $v(y) \in \mathcal{B}$ dla wszystkich $y \in Y'$, także wartość termu t w A przy wartościowaniu v należy do $\mathcal{B}$, $t_A[v] \in \mathcal{B}$. Wowczas algebra A z dzwonkami doczepionymi do wszystkich elementów $\mathcal{B}$ (i tylko do tych elementów) jest wolna nad A względem $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi}$ z identycznością jako jednością.

   (b) prawy sprzężony: dla dowolnej algebry $A \in |\mathbf{Alg}(\Sigma)|$, A z dzwonkami doczepionymi do wszystkich elementów jest kowolna nad A względem względem $\mathcal{G}_{\Sigma,\Phi}$ z identycznością jako kojednością.

5. Dla dowolnego zbioru Σ-formuł Φ, funktor $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi} : \mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi) \to \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$

   (a) ma lewy sprzężony: wystarczy pokazać istenienie algebr wolnych. Niech $A \in |BPAlg(\Sigma)|$. Wykorzystamy konstrukcję z rozwiązania zadania 2 Przyjmijmy $X = |A|$, $\mathcal{X}_B = \{a \mid \mathcal{B}_A(a)\}$ i $\mathcal{X}_P = \{a \mid \mathcal{P}_{A_i}(a) = a' \text{ dla pewnego } a' \in |A|\}$. Niech $\cong$ będzie najmniejszą głośną kongruencją na $F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)$ taką, że:

   - dla każdej Σ-operacji $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ oraz $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, zachodzi $f(a_1, \ldots, a_n) \cong f_A(a_1, \ldots, a_n)$;
   - dla $\mathcal{P}_{A_i}(a) = a'$, $p(a) \cong a'$.

   Zdefiniujmy $C = F_{\Sigma,\Phi}^{\mathcal{X}_B,\mathcal{X}_P}(X)/\cong$. Łatwo teraz sprawdzić, że:

   - $C \in \mathbf{BPWAlg}(\Sigma, \Phi)$;
   - $\eta_A(a) = [a]_{\cong}$ dla $a \in |A|$ definiuje homomorfizm głośnych algebr $\eta_A : A \to \mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(C)$,
   - C z jednością $\eta_A : A \to \mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}(C)$ jest algebrą wolną nad A względem $\mathcal{F}_{\Sigma,\Phi}$.

   (b) nie ma prawego sprzężonego (patrz rozwiązanie zadania 6 poniżej).

6. Funktor $\mathcal{F}_{\Sigma,\emptyset} : \mathbf{BPWAlg}(\Sigma) \to \mathbf{BPAlg}(\Sigma)$

   (a) ma lewy sprzężony — jako szczególny przypadek zadania 6, albo w tym przypadku możliwie najprościej: głośną algebrą wolną nad $A \in |\mathbf{BPAlg}(\Sigma)|$ względem funktora $\mathcal{F}_{\Sigma,\emptyset}$ jest ta sama algebra A (bez żadnych gwizdków) z identycznością jako jednością.

   (b) nie ma prawego sprzężonego: $\mathbf{BPAlg}(\Sigma)$ ma obiekt końcowy (zadanie 2), prawe sprzężone zachowują granice, a $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ nie ma obiektu końcowego (zadanie 1).

7. Kategoria $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$ ma (więcej niż jeden) epimorficzno-monomorficzny system podziału.

   Na przykład: *mocnym epimorfizmem* głośnych algebr nazwijmy każdy homomorfizm głośnych algebr $h : A \to B$ taki, że naturalna funkcja $i : |A| \to |B|$ zadana przez $i([a]_{\cong_h}) = h(a)$, gdzie $\cong_h$ jest jądrem homomorfizmu h, jest izomorfizmem głośnych algebr $i : A/\cong_h \to B$. Mocne epimorfizmy i różnowartościowe homomorfizmy (monomorfizmy) głośnych algebr tworzą system podziału dla $\mathbf{BPWAlg}(\Sigma)$.