Egzamin z wykładu monograficznego

Podstawy algebry ogólnej i teorii kategorii
semestr zimowy 2004/05

Pojęcia, terminologia i notacja:

Sygnaturą z podrodzajami nazywam dowolną trójkę $\langle S, \leq, \Omega\rangle$, gdzie

- S jest zbiorem nazw rodzajów;
- $\leq \subset S \times S$ jest częściowym porządkiem na S; $\leq$ rozszerzam do S^*: $s_1 \ldots s_n \leq s'_1 \ldots s'_n$ gdy $s_1 \leq s'_1, \ldots, s_n \leq s'_n$;
- $\Omega = \langle \Omega_{w,s}\rangle_{w\in S^*, s\in S}$ jest rodziną zbiorów nazw operacji indeksowaną ich arnościami i rodzajami wyników, taką że dla każdych $w' \leq w$ i $s \leq s'$, $\Omega_{w,s} \subseteq \Omega_{w',s'}$. Jak zwykle, $f : w \to s$ oznacza $w \in S^*$, $s \in S$ i $f \in \Omega_{w,s}$.

Niech $\Sigma = \langle S, \leq, \Omega\rangle$ będzie dowolna sygnaturą z podrodzajami.

Σ-*algebra* A (z podrodzajami) składa się z S-rodzajowego zbioru $|A|$ oraz dla $f : s_1, \ldots, s_n \to s$, z funkcji $f_A^{s_1,\ldots,s_n\to s} : |A|_{s_1} \times \ldots \times |A|_{s_n} \to |A|_s$ (zwanych *operacjami* algebry) i dla $s \leq s'$ w S, z funkcji $in_A^{s\leq s'} : |A|_s \to |A|_{s'}$ (zwanych *włożeniami podrodzajowymi* algebry) takich że:

- dla $s \in S$, $in_A^{s\leq s} = id_{|A|_s}$, oraz dla $s \leq s'$ i $s' \leq s''$, $in_A^{s\leq s''} = in_A^{s\leq s'}; in_A^{s'\leq s''}$,
- dla $f : s_1, \ldots, s_n \to s$ i $s'_1 \leq s_1, \ldots, s'_n \leq s_n$, $s \leq s'$, oraz $a'_1 \in |A|_{s'_1}, \ldots, a'_n \in |A|_{s'_n}$,

$$f_A^{s'_1,\ldots,s'_n\to s'}(a'_1, \ldots, a'_n) = in_A^{s\leq s'}(f_A^{s_1,\ldots,s_n\to s}(in_A^{s'_1\leq s_1}(a'_1), \ldots, in_A^{s'_n\leq s_n}(a'_n)))$$

Σ-algebra A jest *inkluzyjna*, gdy dla każdych $s \leq s'$, $in_A^{s\leq s'}$ jest inkluzją.

Σ-*homomorfizm* $h : A \to B$ pomiędzy Σ-algebrami A i B to rodzina funkcji $h = \langle h_s : |A|_s \to |B|_s\rangle_{s\in S}$, która zachowuje operacje i włożenia podrodzajowe, tzn.

- dla $f : s_1, \ldots, s_n \to s$ i $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$, $h_s(f_A(a_1, \ldots, a_n)) = f_B(h_{s_1}(a_1), \ldots, h_{s_n}(a_n))$,
- dla $s \leq s'$ i $a \in |A|_s$, $h_{s'}(in_A^{s\leq s'}(a)) = in_B^{s\leq s'}(h_s(a))$.

Niech $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ oznacza kategorię wszystkich Σ-algebr z Σ-homomorfizmami jako morfizmami, z oczywistym zlożeniem. $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$ jest jej pełną podkategorią ze wszystkimi inkluzyjnymi Σ-algebrami jako obiektami.

Niech $\mathbf{Set}^S$ oznacza zwykłą kategorię zbiorów S-rodzajowych. S-rodzajowy zbiór $\langle X_s\rangle_{s\in S}$ jest *inkluzyjny*, gdy $X_s \subseteq X_{s'}$ dla $s \leq s'$. S-rodzajowa funkcja $f : \langle X_s\rangle_{s\in S} \to \langle Y_s\rangle_{s\in S}$ między inkluzyjnymi zbiorami $\langle X_s\rangle_{s\in S}$ i $\langle Y_s\rangle_{s\in S}$ jest *inkluzyjna*, gdy $f_s(x) = f_{s'}(x)$ dla $s \leq s'$ i $x \in X_s$.

Niech $\mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ będzie podkategorią $\mathbf{Set}^S$ ze wszystkimi inkluzyjnymi zbiorami S-rodzajowymi jako obiektami i wszystkimi inkluzyjnymi funkcjami S-rodzajowymi jako morfizmami.

W końcu, definiuję oczywiste funktory:

- $\mathcal{U}_\Sigma : \mathbf{SSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ — zadany przez $\mathcal{U}_\Sigma(A) = |A|$, dla $A \in |\mathbf{SSAlg}(\Sigma)|$, oraz $\mathcal{U}_\Sigma(h) = h$ dla morfizmów w $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$;
- $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}_\Sigma : \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ — zadany przez $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}_\Sigma(A) = |A|$, dla $A \in |\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)|$, oraz $\mathcal{U}_\Sigma(h) = h$ dla morfizmów w $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$.

Zadanie:

Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe dla dowolnej sygnatury z podrodzajami $\Sigma = \langle S, \leq, \Omega\rangle$? Udowodnij lub uzasadnij odpowiedź negatywną.

1. W kategorii $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$, morfizm h jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$, h_s jest funkcją różnowartościową.
2. W kategorii $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$, morfizm h jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$, h_s jest funkcją różnowartościową.
3. W kategorii $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$, morfizm h jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$, h_s jest funkcją "na".
4. W kategorii $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$, morfizm h jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $s \in S$, h_s jest funkcją "na".
5. Kategoria $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ jest zupełna.
6. Kategoria $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$ jest zupełna.
7. Kategoria $\mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ jest zupełna.
8. Kategoria $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ jest ko-zupełna.
9. Kategoria $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$ jest ko-zupełna .
10. Kategoria $\mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ jest ko-zupełna.
11. Funktor inkluzji $\mathcal{J}_S \colon \mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle} \hookrightarrow \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
12. Funktor inkluzji $\mathcal{J}_\Sigma \colon \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ ma lewy sprzężony.
13. Funktor $\mathcal{U}_\Sigma \colon \mathbf{SSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.
14. Funktor $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}_\Sigma \colon \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ ma lewy sprzężony.
15. Funktor $\mathcal{J}_\Sigma;\mathcal{U}_\Sigma \colon \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ ma lewy sprzężony.

W przypadku kłopotów z zadaniami **??**–**??**, można je rozwiązać w wersji nieco notacyjnie łatwiejszej, dla sygnatur Σ ze *skończonym* zbiorem nazw rodzajów S.

Można korzystać z twierdzeń podawanych na wykładzie bez ich dowodzenia — ale dla jednoznaczności proszę je wówczas sformułować.

Możliwe rozwiązanie:

Preliminaria:

Dla dowolnej sygnatury z podrodzajami $\Sigma = \langle S, \leq, \Omega\rangle$, niech Σ^+ będzie zwykłą sygnaturą algebraiczną ze zbiorem nazw rodzajów S i z nazwami operacji z Ω oraz $in^{s\leq s'}: s \to s'$ dla wszystkich $s \leq s'$ w Σ. Niech dalej $\Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma)$ będzie zbiorem Σ^+-równości:

- $\forall x{:}s \cdot in^{s\leq s}(x) = x$, dla wszystkich $s \in S$,
- $\forall x{:}s \cdot in^{s\leq s'}(in^{s'\leq s''}(x)) = in^{s\leq s''}(x)$, dla wszystkich $s \leq s' \leq s''$ w $\langle S, \leq\rangle$,
- $\forall x_1{:}s'_1, \dots x_n{:}s'_n \cdot f^{s'_1,\dots,s'_n\to s'}(x_1,\dots,x_n) = in^{s\leq s'}(f^{s_1,\dots,s_n\to s}(in^{s'_1\leq s_1}(x_1),\dots,in^{s'_n\leq s_n}(x_n)))$, dla wszystkich $f{:}\, s_1,\dots,s_n \to s$ i $s'_1 \leq s_1, \dots, s'_n \leq s_n$, $s \leq s'$.

Niech $\Psi_{\mathbf{ISS}}(\Sigma)$ będzie zbiorem warunkowych Σ^+-równości:

- $\forall x{:}s, y{:}s \cdot in^{s\leq s'}(x) = in^{s\leq s'}(y) \Longrightarrow x = y$, dla wszystkich $s \leq s'$ w $\langle S, \leq\rangle$.

Dla dowolnej sygnatury algebraicznej Δ i zbioru warunkowych Δ-rowności Φ, niech $\mathbf{Alg}(\Delta)$ będzie kategorią wszytkich Δ-algebr i ich homomorfizmów, a $\mathbf{Alg}(\Delta,\Phi)$ jej pełną podkategorią wyznaczoną przez wszystkie Δ-algebry spełniające wszystkie formuły w Φ.

Wprost z definicji wynika[1]:

Fakt 1 *Dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle S, \leq\rangle$ i sygnatury z podrodzajami $\Sigma = \langle S, \leq, \Omega\rangle$:*

- *kategoria $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ to $\mathbf{Alg}(\Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma))$;*
- *kategoria $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$ jest podkategorią kateogrii $\mathbf{Alg}(\Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\Sigma))$ i jest jej równoważna;*
- *kategoria $\mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ to $\mathbf{ISSAlg}(\langle S, \leq, \emptyset\rangle)$;*
- *kategoria $\mathbf{Set}^S$ to $\mathbf{SSAlg}(\langle S, id_S, \emptyset\rangle)$.*

Powyższy fakt prowadzi do stwierdzeń 5–15 na tysiąc sposobów, korzystając z różnych faktów wspominanych na wykładzie[2]. Na przykład, kontynuując preliminaria:

Dla dowolnych sygnatur algebraicznych Δ, Δ' i zbiorów Δ- i Δ'-formuł Φ, Φ', odpowiednio, morfizmem teorii z $\langle \Delta, \Phi\rangle$ do $\langle \Delta', \Phi'\rangle$ nazywamy każdy taki morfizm sygnatur algebraicznych $\delta{:}\, \Delta \to \Delta'$, że dla dowolnej Δ'-algebry A', jeśli $A' \models_{\Delta'} \Phi'$ to $A|_\delta \models_\Delta \Phi$.

Fakt 2 *Dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego $\langle S, \leq\rangle$ i sygnatury z podrodzajami $\Sigma = \langle S, \leq, \Omega\rangle$:*

- *Funktor inkluzji $\mathcal{J}_S{:}\, \mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle} \hookrightarrow \mathbf{Set}^S$ jest funktorem reduktu względem oczywistego morfizmu teorii z $\langle\langle S, id_S, \emptyset\rangle^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\langle S, id_S, \emptyset\rangle)\rangle$ w $\langle\langle S, \leq, \emptyset\rangle^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\langle S, \leq, \emptyset\rangle) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\langle S, \leq, \emptyset\rangle)\rangle$ (obciętym do $\mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$).*
- *Funktor inkluzji $\mathcal{J}_\Sigma{:}\, \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \hookrightarrow \mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ jest funktorem reduktu względem oczywistego morfizmu teorii z $\langle \Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma)\rangle$ w $\langle \Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\Sigma)\rangle$ (obciętym do $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$).*

[1] Puryści zechcą być może zastąpić stwierdzane poniżej tożsamości kategorii ich izomorfizmem.

[2] Być może tu potrzebnych w nieco uogólnionej postaci — nie mam pod ręką notatek, by to sprawdzić i powołać się na konkretne twierdzenia, stąd też kilka pewno zbędnych dowodów.

- *Funktor* $\mathcal{U}_\Sigma\colon \mathbf{SSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ *jest funktorem reduktu względem oczywistego morfizmu teorii z* $\langle\langle S, id_S, \emptyset\rangle^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\langle S, id_S, \emptyset\rangle)\rangle$ *w* $\langle\Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma)\rangle$.

- *Funktor* $\mathcal{U}^{\mathcal{I}}_\Sigma\colon \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{ISet}^{\langle S,\leq\rangle}$ *jest funktorem reduktu względem oczywistego morfizmu teorii z* $\langle\langle S, \leq, \emptyset\rangle^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\langle S, \leq, \emptyset\rangle) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\langle S, \leq, \emptyset\rangle)\rangle$ *w* $\langle\Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\Sigma)\rangle$ *(obciętym do* $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$*).*

- *Funktor* $\mathcal{J}_\Sigma;\mathcal{U}_\Sigma\colon \mathbf{ISSAlg}(\Sigma) \to \mathbf{Set}^S$ *jest funktorem reduktu względem oczywistego morfizmu teorii z* $\langle\langle S, id_S, \emptyset\rangle^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\langle S, id_S, \emptyset\rangle)\rangle$ *w* $\langle\Sigma^+, \Psi_{\mathbf{SS}}(\Sigma) \cup \Psi_{\mathbf{ISS}}(\Sigma)\rangle$ *(obciętym do* $\mathbf{ISSAlg}(\Sigma)$*).*

Twierdzenie 3 *Dla dowolnego morfizmu teorii* $\delta\colon \langle\Delta, \Phi\rangle \to \langle\Delta', \Phi'\rangle$, *jeśli* Φ' *jest zbiorem warunkowych* Δ'*-równości, to funktor reduktu* $\_|_\delta\colon \mathbf{Alg}(\Delta', \Phi') \to \mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$ *ma lewy sprzężony.*
Dowód (szkic): Niech A będzie dowolną Δ-algebrą. Zdefiniujmy Δ'-algebrę $T_{\Delta'}(\delta(|A|))$ jako algebrę Δ'-termów nad zbiorem "zmiennych" $\delta(|A|)$, gdzie $\delta(|A|)_{s'} = \{\langle a, s\rangle \mid \delta(s) = s' \text{ oraz } a \in |A|_s\}$. Niech dalej $\cong$ będzie najmniejszą Δ'-kongruencją na $T_{\Delta'}(\delta(|A|))$ taką że:[3]

(a) dla każdego $\forall X \cdot \langle t_i = t'_i\rangle_{i\in I} \Longrightarrow t = t'$ w Φ' i wartościowania $v\colon X \to |T_{\Delta'}(\delta(|A|))|$,

$$\text{jeśli } (t_i)_{T_{\Delta'}(\delta(|A|))}[v] \cong (t'_i)_{T_{\Delta'}(\delta(|A|))}[v] \text{ dla } i \in I, \text{ to } t_{T_{\Delta'}(\delta(|A|))}[v] \cong t'_{T_{\Delta'}(\delta(|A|))}[v]$$

(b) dla $f\colon s_1, \ldots, s_n \to s$ w Δ oraz $a_1 \in |A|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A|_{s_n}$,

$$\delta(f)_{T_{\Delta'}(\delta(|A|))|}(\langle a_1, s_1\rangle, \ldots, \langle a_n, s_n\rangle) \cong \langle f_A(a_1, \ldots, a_n), s\rangle.$$

Rodzina kongruencji spełniających powyższe warunki jest niepusta i zamknięta na przecięcia; zatem powyższe dobrze definiuje $\cong$. Rozpatrzmy algebrę ilorazową $F_\delta(A) = T_{\Delta'}(\delta(|A|))/{\cong}$. Łatwo widać, że **(a)** zapewnia $F_\delta(A) \models_{\Delta'} \Phi'$. Z kolei **(b)** zapewnia, że funkcja zadana przez $(\eta_A)_s(a) = [\langle a, s\rangle]_\cong$ dla nazwy rodzaju s w Δ i $a \in |A|_s$ jest Δ-homomorfizmem $\eta_A\colon A \to F_\delta(A)|_\delta$.

Pozostaje sprawdzić, że $F_\delta(A)$ jest wolna nad A z jednością $\eta_A\colon A \to F_\delta(A)|_\delta$ względem funktora $\_|_\delta\colon \mathbf{Alg}(\Delta', \Phi') \to \mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$.

Rozważmy dowolne $B' \in |\mathbf{Alg}(\Delta', \Phi')|$ oraz $f\colon A \to B'|_\delta$. Niech $v\colon \delta(|A|) \to |B'|$ będzie funkcją zadaną przez $v_{s'}(\langle a, s\rangle) = f_s(a)$, dla $\delta(s) = s'$ i $a \in |A|_s$. Zdefiniujmy kongruencję $\approx$ na $T_{\Delta'}(\delta(|A|))$ przez: $t \approx t'$ gdy $t_{B'}[v] = t'_{B'}[v]$. Ponieważ $B' \models_{\Delta'} \Phi'$, $\approx$ spełnia **(a)**. Ponieważ f jest Δ-homomorfizmem, $\approx$ spełnia **(b)**. Zatem $\cong \subseteq \approx$ i możemy zdefiniować Δ'-homomorfizm $f^\#\colon F_\delta(A) \to B'$ jak następuje: dla $t \in |T_{\Delta'}(\delta(|A|))|$, $f^\#([t]_\cong) = t_{B'}[v]$. Łatwo już teraz sprawdzić, że $\eta_A; f^\#|_\delta = f$ i że jest to jedyny Δ'-homomorfizm z $F_\delta(A)$ w B' o tej własności. □

Twierdzenie 4 *Dla dowolnej sygnatury algebraicznej* Δ *i zbioru warunkowych* Δ*-równości* Φ*, kategoria* $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$ *jest zupełna.*
Dowód (szkic): Rodzina Δ-algebr spełniających Φ jest zamknięta na podalgebry i produkty algebr; zatem $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$ dziedziczy granice z $\mathbf{Alg}(\Delta)$. □

Twierdzenie 5 *Dla dowolnej sygnatury algebraicznej* Δ *i zbioru warunkowych* Δ*-równości* Φ*, kategoria* $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$ *jest ko-zupełna.*
Dowód (szkic): Wystarczy pokazać istnienie ko-produktów i ko-ekwalizatorów[4].

- Niech $\langle A_j\rangle_{j\in J}$ będzie dowolną rodziną algebr w $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$. Rozważmy algebrę Δ-termów $T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)$, ze "zmiennymi" $\Sigma_{j\in J}|A_j| = \bigcup_{j\in J}(|A_j| \times \{j\})$. Niech $\cong$ będzie najmniejszą Δ-kongruencją na $T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)$ taką że:

[3] Przez $t_B[v]$ oznaczam wartość termu t w algebrze B przy wartościowaniu v.
[4] Wciąż poszukuję dobrego polskiego słowa.

(a) dla każdego $\forall X \cdot \langle t_i = t'_i \rangle_{i \in I} \Longrightarrow t = t'$ w Φ i wartościowania $v: X \to |T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_i|)|$, jeśli dla $i \in I$, $(t_i)_{T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)}[v] \cong (t'_i)_{T_{\Delta'}(\Sigma_{j\in J}|A_j|)}[v]$ to $t_{T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)}[v] \cong t'_{T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)}[v]$,

(b) dla $f: s_1, \ldots, s_n \to s$ w Δ, $k \in J$ oraz $a_1 \in |A_k|_{s_1}, \ldots, a_n \in |A_k|_{s_n}$,

$$f_{T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)|}(\langle a_1, k\rangle, \ldots, \langle a_n, k\rangle) \cong \langle f_{A_k}(a_1, \ldots, a_n), k\rangle.$$

Rodzina kongruencji spełniających powyższe warunki jest niepusta i zamknięta na przecięcia; zatem powyższe dobrze definiuje $\cong$. Rozpatrzmy algebrę ilorazową $\sum_{j\in J} A_j = T_\Delta(\Sigma_{j\in J}|A_j|)/\cong$. Łatwo widać, że **(a)** zapewnia $\sum_{j\in J} A_j \models_\Delta \Phi$. Z kolei **(b)** zapewnia, że dla $k \in J$, funkcja zadana przez $(\iota_k)(a) = [\langle a, k\rangle]_\cong$ dla $a \in |A_k|$ jest Δ-homomorfizmem $\iota_k: A_k \to \sum_{j\in J} A_j$. W końcu, łatwo też sprawdzić, że $\sum_{j\in J} A_j$ z morfizmami $\iota_k: A_k \to \sum_{j\in J} A_j$, $k \in J$, jest koproduktem rodziny $\langle j \in J\rangle_{A_j}$ w $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$.

- Rozważmy dwa homomorfizmy $f, g: A \to B$ w $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$. Niech $\cong$ będzie najmniejszą Δ-kongruencją na B taką że:

  (a) dla każdego $\forall X \cdot \langle t_i = t'_i \rangle_{i \in I} \Longrightarrow t = t'$ w Φ i wartościowania $v: X \to |B|$, jeśli dla $i \in I$, $(t_i)_B[v] \cong (t'_i)_B[v]$ to $t_B[v] \cong t'_B[v]$,

  (b) dla $a \in |A|$, $f(a) \cong g(a)$.

  Rodzina kongruencji spełniających powyższe warunki jest niepusta i zamknięta na przecięcia; zatem powyższe dobrze definiuje $\cong$. Łatwo widać, że **(a)** zapewnia $B/\cong \models_\Delta \Phi$ i dalej, że naturalny homomorfizm $[\_]_\cong: B \to B/\cong$ jest ko-ekwalizatorem f i g w $\mathbf{Alg}(\Delta, \Phi)$.

$\square$

Rozwiązania:

5–7: Proste wnioski z Faktu **??** i Twierdzenia **??**.

8–10: Proste wnioski z Faktu **??** i Twierdzenia **??**.

11–15: Proste wnioski z Faktu **??** i Twierdzenia **??**.

1–2: Każdy różnowartościowy homomorfizm jest oczywiście monomorfizmem.

Rozważmy dowolny Σ-homomorfizm $h: A \to B$ w $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ i przypuśćmy, że h nie jest różnowartościowy, na przykład $h_s(a) = h_s(a')$ dla s w Σ i $a, a' \in |A|$, $a \neq a'$. Niech $F_\Sigma(x{:}s)$ będzie wolną Σ-algebrą generowaną przez jednoelementowy zbiór $\{x\}$ rodzaju s (pusty dla pozostałych rodzajów w Σ). Niech $f, f': F_\Sigma(x{:}s) \to A$ będą Σ-homomorfizmami zadanymi przez $f_s(x) = a$ i $f'_s(x) = a'$, odpowiednio. Mamy teraz $f \neq f'$ oraz $f; h = f'; h$. Zatem h nie jest monomorfizmem, co dowodzi równoważności 1.

Równoważność 2. dowodzi się podobnie.

3: Oczywiście, każdy Σ-homomorfizm "na" jest epimorfizmem w $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$.

Rozważmy dowolny Σ-homomorfizm $h: A \to B$ w $\mathbf{SSAlg}(\Sigma)$ i przypuśćmy, że h nie jest "na". Dla każdego rodzaju s w Σ, niech x_s będzie taki, że $x_s \notin |B|_s$, oraz $1, 2$ niech będą takie, że $(|B|_s \times \{1, 2\}) \cap (|B|_s \cup \{x_s\}) = \emptyset$. Dla $i = 1, 2$, niech $(X_i)_s = h_s(|A|_s) \cup ((|B|_s \setminus h_s(|A|_s)) \times \{i\})$ oraz niech $\iota_i: |B| \to X_i$ będzie bijekcją taką, że dla $a \in |A|_s$, $(\iota_i)_s(h_s(a)) = h_s(a)$, a dla $b \in (|B|_s \setminus h_s(|A|_s))$, $(\iota_i)_s(b) = \langle b, i\rangle$.

Zdefiniujmy Σ-algebrę C jak następuje:

- $|C|_s = (X_1)_s \cup (X_2)_s \cup \{x_s\}$, dla każdego rodzaju s w Σ.
- dla $f\colon s_1, \ldots, s_n \to s$ w Σ oraz $c_1 \in |C|_{s_1}$, ..., $c_n \in |C|_{s_n}$:
  - jeśli dla $i = 1$ lub $i = 2$, $c_1 \in (X_i)_{s_1}$, ..., $c_n \in (X_i)_{s_n}$, to $f_C^{s_1,\ldots,s_n \to s}(c_1, \ldots, c_n) = (\iota_i)_s(f_B^{s_1,\ldots,s_n \to s}((\iota_i^{-1})_{s_1}(c_1), \ldots, (\iota_i^{-1})_{s_n}(c_n)))$
  - w pozostałych przypadkach, $f_C^{s_1,\ldots,s_n \to s}(c_1, \ldots, c_n) = x_s$.
- dla $s \le s'$ w Σ, $in_C^{s \le s'}(x_s) = x_{s'}$, a dla $c \in (X_i)_s$, $i = 1, 2$, $in^{s \le s'}(c) = (\iota_i)_{s'}(in_B^{s \le s'}((\iota_i^{-1})_s(c)))$.

Łatwo sprawdzić, że powyższe definiuje Σ-algebrę $C \in |\mathbf{SSAlg}(\Sigma)|$ oraz dla $i = 1, 2$, $\iota_i\colon B \to C$ jest Σ-homomorfizmem.

Mamy przy tym: $h; \iota_1 = h; \iota_2$ oraz $\iota_1 \neq \iota_2$. Zatem h nie jest epimorfizmem, co dowodzi równoważności 3.

UWAGA: skonstruowana wyżej Σ-algebra C na ogół nie spełnia wszystkich równości, które są prawdziwe w B. Powyższa równoważność nie przenosi sie na dowolne kategorie algebr definiowane równościowo.

4: Niech $S = \{s, s'\}$ i $s \le s'$. Niech $X_{s'} = \{x\} = Y_{s'} = Y_s$ oraz $X_s = \emptyset$. Inkluzja $\iota\colon X \to Y$ nie jest "na" (na rodzaju s), ale jest epimorfizmem w $\mathbf{ISet}^{\langle S, \le \rangle}$. Jeśli bowiem dwie funkcje inkluzyjne $f_1, f_2\colon Y \to Z$ spełniają $(f_1)_{s'}(x) = (f_2)_{s'}(x)$, to $(f_1)_s(x) = (f_1)_{s'}(x) = (f_2)_{s'}(x) = (f_2)_s(x)$ (z inkluzyjności f_1 i f_2).

UWAGA: powyższy kontrprzykład można uogólnić do dowolnej sygnatury z podrodzajami z różnym od identyczności porządkiem między rodzajami.