Zadania domowe

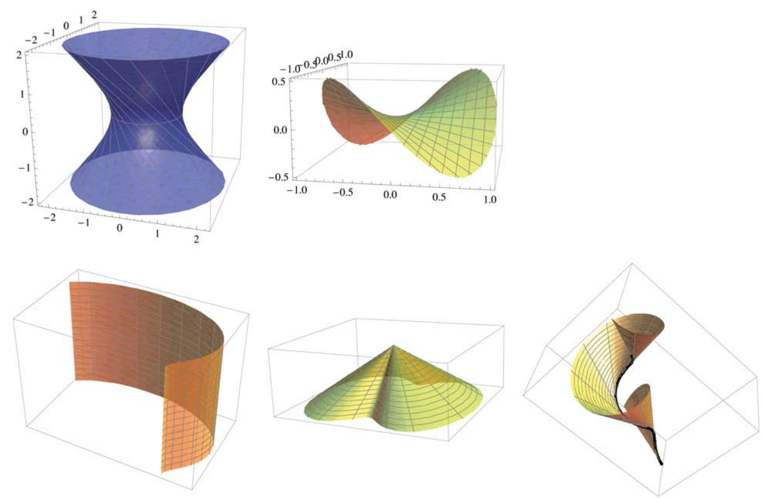
14.12.2007

Powierzchnia jest *prostokreślna*, jeżeli ma parametryzację postaci

$$\phi(u,v) = \beta(u) + v \cdot \delta(u). \qquad (\star)$$

Jak widać, przez każdy punkt $\phi(u,v)$ na powierzchni przechodzi wówczas pewna prosta w kierunku $\delta(u)$, zwana tworzącą.

Przykłady:



Na rysunku
$\kappa < 0$: hiperboloida jednopowłokowa, powierzchnia siodłowa
$\kappa = 0$: uogólniony walec, uogólniony stożek, powierzchnia stycznych do krzywej

Zadanie 1 *Znajdź parametryzację postaci* $(\star)$ *hiperboloidy jednopowłokowej opisanej równaniem* $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Wskazówka. *Znajdź jedną prostą leżącą na tej powierzchni obrotowej i obracaj ją wokół osi* z.

Zadanie 2 *Uzasadnij, że krzywizna Gaussa powierzchni prostokreślnej jest zawsze niedodatnia.*

Zadanie 3 *Pokaż, że krzywizna Gaussa powierzchni prostokreślnej o parametryzacji ($\star$) wyraża się wzorem*

$$\kappa = \frac{-(\beta' \cdot \delta \times \delta')^2}{\|\beta' \times \delta + v\delta' \times \delta\|^4}.$$

Zadanie 4 *Posługując się powyższym wzorem, oblicz krzywiznę Gaussa powierzchni siodłowej $z = x \cdot y$ oraz hiperboloidy jednopowłokowej.*

Powierzchnia prostokreślna jest *rozwijalna*, jeżeli jej jednostkowy wektor normalny jest stały wzdłuż tworzących, tzn. $\overrightarrow{N}(u, v)$ nie zależy od v.

Zadanie 5 *Pokaż, że powierzchnia prostokreślna jest rozwijalna wtedy i tylko wtedy, gdy jej krzywizna Gaussa jest równa zeru.*

Dla ciekawskich Okazuje się, że *wszystkie* powierzchnie w $\mathbb{R}^3$ o zerowej krzywiźnie Gaussa są prostokreślne, więc też rozwijalne. W $\mathbb{R}^4$ ten fakt już nie ma miejsca. Powierzchnie rozwijalne mają zastosowanie w inżynierii, w szczególności w okrętownictwie, ponieważ są to dokładnie te powierzchnie, które można otrzymać z wyginania powierzchni blachy, bez załamywania jej. Inna charakteryzacja powierzchni rozwijalnych w $\mathbb{R}^3$ mówi, że składają się one z kawałków trzech typów:

- Uogólniony walec – powierzchnie prostokreślne dla których $\delta = const$
- Uogólniony stożek – powierzchnie prostokreślne dla których $\beta = const$
- Powierzchnia utworzona ze stycznych do krzywej – powierzchnie prostokreślne, dla których $\delta = \beta'$.