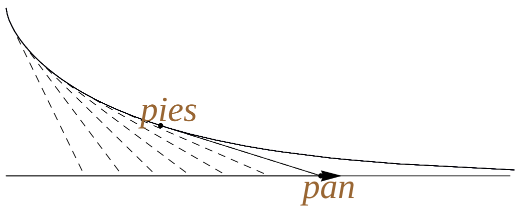
Zadania domowe

25.11.2007

Pies (rasy pekińczyk) jest uwiązany na smyczy długości jednego metra, trzymanej przez swojego pana (Pigmeja zaniedbywalnych rozmiarów). Początkowo, pies znajduje się 1m na północ od swojego pana. Pan wybiera się na spacer w kierunku wschodnim, a pies podąża za nim, idąc zawsze w kierunku, w którym ciągnie go smycz. Krzywa zakreślona przez pekińczyka nosi nazwę *traktrysy* (od łacińskiego *trahere*—ciągnąć).



Konstrukcja traktrysy

Zadanie 1

- *Napisz równanie różniczkowe opisujące traktrysę oraz pokaż, że krzywa ta może być opisana równaniem*

$$-x = \log\left((1 - \sqrt{1 - y^2})/y\right) + \sqrt{1 - y^2}.$$

- *Oblicz krzywiznę traktrysy.*
- (Trudniejsze) *Pokaż, że krzywa łańcuchowa* $y = \cosh(x)$ *jest ewolutą traktrysy, lub, równoważnie, że ewolwentą krzywej łańcuchowej jest traktrysa.*

Krzywizna normalna hiperpowierzchni $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ w punkcie $x \in M$ oraz kierunku $\overrightarrow{t} \in T_xM$ (gdy $\|\overrightarrow{t}\| = 1$) jest to wartość wyrażenia

$$\mathrm{II}_x(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{t}).$$

Z twierdzenia 1.8 z wykładu wynika, że wartość tę można policzyć biorąc dowolną krzywą gładką γ przechodzącą przez punkt x z wektorem stycznym $\overrightarrow{t}$ w tym punkcie. Wówczas szukana wartość będzie równa

$$\kappa(x) \cdot \langle \overrightarrow{N}(x), \overrightarrow{n}(x) \rangle$$

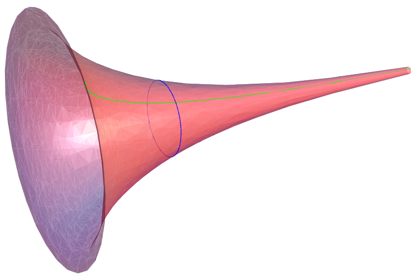
gdzie $\kappa(x)$ to krzywizna krzywej γ w punkcie x, $\overrightarrow{n}(x)$ to wektor normalny do krzywej γ w punkcie x oraz $\overrightarrow{N}(x)$ to wektor normalny do powierzchni M w punkcie x.

W powyższej sytuacji mówimy też, że wartość ta jest *krzywizną normalną krzywej* γ w punkcie x. Jest to rozmiar tej składowej przyspieszenia działającego na punkt poruszający się po krzywej γ, która pochodzi od zakrzywienia przestrzeni.

Niech γ będzie dowolną krzywą gładką w $\mathbb{R}^2$ nieprzecinającą prostej l oraz niech M będzie powierzchnią powstałą przez obrót γ wokół osi l. Południkami powierzchni M nazywamy kopie krzywej γ, powstałe przez obrócenie γ o ustalony kąt, a równoleżnikami powierzchni M nazywamy okrąg powstały przez obrót ustalonego punktu $p \in \gamma$ wokół osi l.

> **Zadanie 2** *Niech powierzchnia M będzie powierzchnią powstałą przez obrót danej krzywej γ wokół osi l. Oblicz krzywiznę normalną południków i równoleżników M.*

Powierzchnia powstała przez obrót traktrysy wokół jej asymptoty nazywa się *pseudosferą*.



Pseudosfera z zaznaczym na zielono południkiem
oraz na niebiesko równoleżnikiem.

Zadanie 3

- *Policz krzywiznę normalną południków i równoleżników pseudosfery i zauważ, że ich iloczyn w każdym punkcie wynosi -1.*
- *(*Trudniejsze*) Wywnioskuj, że krzywizna Gaussa pseudosfery jest stała i wynosi -1 (to i inne jej własności czynią ją podobną do sfery).*