Zadania domowe

9.11.2007

Definicja 1 *Loksodromą* na sferze nazywamy krzywą, która każdy południk przecina pod stałym kątem.

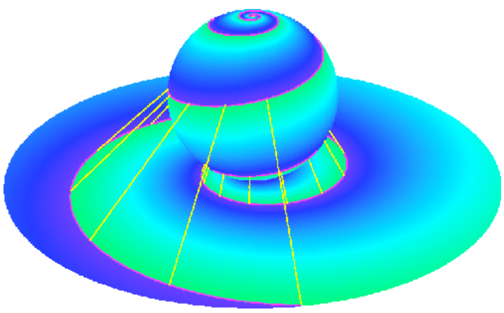
Np. jeżeli statek z kompasem przemieszcza się w taki sposób, by kompas wciąż wskazywał ten sam kierunek, to ruch statku wyznaczy loksodromę.

Współrzędne Merkatora wyrażają się przez współrzędne sferyczne wzorem $x = \lambda$, $y = \operatorname{arctanh}(\sin(\phi))$

Zadanie 1 *A) Opisz we współrzędnych Merkatora loksodromy.*

B) Oblicz długość loksodromy łączącej dwa punkty na sferze i porównaj ją z długością łuku okręgu wielkiego pomiędzy tymi punktami.

Definicja 2 *Rzut stereograficzny* π sfery na płaszczyznę opisujemy następująco. Niech $S \subset \mathbb{R}^3$ będzie sferą o środku w punkcie $(0, 0, 1)$ oraz promieniu 1. Niech N oznacza biegun północny, czyli punkt $(0, 0, 2)$. Punkt $p \neq N$ na sferze przekształcany jest na punkt $\pi(p)$ będący przecięciem prostej przechodzącej przez punkty N oraz p z płaszczyzną xy (zobacz rysunek).



Rysunek 1: Rzut stereograficzny loksodromy

Zadanie 2 *Pokaż, że rzut stereograficzny jest wiernokątny (tzn. zachowuje kąty między wektorami stycznymi oraz orientację).*

Zadanie 3 *Wykaż, że przy rzucie stereograficznym loksodromy odpowiadają krzywym logarytmicznym (ogólna ich postać we współrzędnych biegunowych to* $r(\theta) = c \cdot a^{\theta}$*).*

Wskazówka: Pokaż, że przy tym rzucie południki przechodzą na promienie oraz że loksodromy to jedyne krzywe o stałym kącie pomiędzy promieniem wodzącym a wektorem stycznym. Stąd wywnioskuj treść zadania.

Model hiperboliczny Hiperboloida dwupowłokowa w $\mathbb{R}^3$ opisana jest równaniem

$$z^2 - x^2 - y^2 = 1.$$

Jej górna powłoka, oznaczana jako H^2, składa się z tych punktów, dla których $z > 0$.

Analogicznie jak w przypadku sfery, rzutujemy stereograficznie H^2, ale tym razem z punktu $(0, 0, -1)$ w płaszczyznę xy. Ten rzut oznaczmy symbolem σ.

Zadanie 4 *A) Uzasadnij, że hiperboloida jest rozmaitością.*

B) Pokaż, że obrazem H^2 *przy rzucie* σ *jest dysk jednostkowy.*

C) Oblicz macierz pierwszej formy w mapie σ*.*

Dla ciekawskich

- Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę jest szczególnym przypadkiem *inwersji*. Inwersją przestrzeni $\mathbb{R}^3$ względem pewnej sfery Z o promieniu R i środku c nazywamy takie przekształcenie, ι które punkt $p \in \mathbb{R}^3$ przeprowadza na punkt q leżący na tym samym promieniu (tzn. półprostej wychodzącej z c) co p, spełniający równość

  $$\|c - p\| \cdot \|c - q\| = R^2.$$

  Inwersja jest przekształceniem wiernokątnym $\mathbb{R}^3 \setminus \{c\}$ w siebie. Rzut stereograficzny sfery na płaszczyznę jest inwersją względem sfery Z o środku w punkcie $(0, 0, 2)$ i promieniu 4, ograniczoną do sfery S.

- Przekształcenie podzbioru otwartego płaszczyzny $U \subset \mathbb{R}^2$ w inny podzbiór płaszczyzny $U' \subset \mathbb{R}^2$ jest wiernokątne wtedy i tylko wtedy, gdy jest bijekcją różniczkowalną jako funkcja zespolona z $U \subset \mathbb{C}$ w $U' \subset \mathbb{C}$. Słynne twierdzenie Riemanna mówi, że *dowolny* otwarty podzbiór $U \subset \mathbb{C}$, którego dopełnienie jest niepuste i spójne da się konforemnie przekształcić na wnętrze dysku jednostkowego (a zatem również na dowolny inny otwarty podzbiór $\mathbb{C}$ o spójnym i niepustym dopełnieniu).

- Geometria przestrzeni H^2 (lub, równoważnie, dysku D z pierwszą formą przeciągniętą z H^2 za pomocą mapy σ, zwanego *modelem dyskowym*) nazywa się *geometrią hiperboliczną*. Analogon H^3 tej przestrzeni w wymiarze 4 ma związek z teorią względności.