Rozwiązanie poniższego zadania (lub jego części) proszę oddać na kartkach, do wtorku, 16.03.10. Proszę o staranne i formalne uzasadnienie odpowiedzi. Łącznie za zadanie można uzyskać 33 punkty.

Szymon Toruńczyk

Zadanie Funkcja $\Gamma(x)$ jest zdefiniowana wzorem

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

dla $x > 0$.

1. *(3 punkty)* Uzasadnij, że ta definicja jest poprawna. Dla jakich niedotatnich liczb rzeczywistych powyższy wzór ma sens?
2. *(3 punkty)* Wykaż, że $\Gamma(1) = 1$.
3. *(5 punktów)* Wykaż, że $\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$ dla $x > 0$. Wywnioskuj, że $\Gamma(n+1) = n!$ dla $n = 0, 1, 2\ldots$, zatem $\Gamma(x+1)$ uogólnia silnię dla liczb rzeczywistych.
4. *(7 punktów)* Uzasadnij, że funkcja $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ jest logarytmicznie wypukła, tzn. funkcja $\log(\Gamma(x))$ jest wypukła (definicja wypukłości jest poniżej; $\mathbb{R}^+$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich).
5. **(15 punktów)* Wykaż, że jeżeli funkcje Γ_1 oraz Γ_2 określone na zbiorze liczb dodatnich spełniają warunki 2, 3 oraz 4 powyżej, to te funkcje są sobie równe. A zatem, Γ jest jedyną funkcją spełniającą warunki $2, 3, 4$.

Niech $I \subset R$ będzie przedziałem (może być $I = \mathbb{R}^+$). Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na przedziale I. *Wykres* funkcji f to podzbiór płaszczyzny $G^= = \{(x, y) : y = f(x)\}$. *Zbiór punktów nad wykresem funkcji* f to podzbiór płaszczyzny $G^\geq = \{(x, y) : y \geq f(x)\}$. *Odcinek łączący* punkty $p = (x_1, y_1)$ oraz $q = (x_2, y_2)$ to zbiór punktów postaci $\lambda p + (1-\lambda)q = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\}$, gdzie $0 \leq \lambda \leq 1$.

Mówimy, że funkcja f jest wypukła jeżeli spełniony jest jeden z poniższych, równoważnych warunków:

- Odcinek łączący dowolne dwa punkty wykresu funkcji f jest zawarty w zbiorze punktów nad wykresem funkcji f
- $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x)$ dla dowolnych $0 \leq \lambda \leq 1$.