Rozwiązania poniższych pierwszych 4 zadań (lub ich części) proszę przynieść na kartkach. Termin oraz punktacja za każde z zadań jest opisany przy zadaniu. Proszę o staranne i formalne uzasadnienie odpowiedzi.

Szymon Toruńczyk

Nieskończone drzewo binarne Niech T będzie nieskończonym drzewem binarnym, urangowanym (tzn. każdy wierzchołek ma wyróżnionego lewego syna i prawego syna). Każdy wierzchołek drzewa T opisany jest przez skończony ciąg składający się z zer i jedynek, czyli słowo nad alfabetem $\{0,1\}$. Np. słowo puste odpowiada *korzeniowi* drzewa (jest to jedyny wierzchołek który nie jest niczyim synem), słowo 0 odpowiada lewemu synowi korzenia, a słowo 01 odpowiada prawemu synowi lewego syna korzenia. Zbiór słów nad alfabetem $\{0,1\}$ oznacza się jako $\{0,1\}^*$. A zatem, wierzchołki drzewa T to są elementy zbioru $\{0,1\}^*$, i każde słowo w jest połączone krawędzią z wierzchołkami $w0$ oraz $w1$.

Dalej, możemy rozpatrzeć zbiór nieskończonych ścieżek w drzewie T. Odpowiadają one nieskończonym słowom nad alfabetem $\{0,1\}$. Zbiór wszystkich tych słów oznacza się jako $\{0,1\}^\omega$.

Rozpatrujemy tę metrykę na z zbiorze $\{0,1\}^\omega$, która była zdefiniowana na ćwiczeniach. Mianowicie, jeżeli $w, v \in \{0,1\}^\omega$ są dwoma nieskończonymi słowami, określamy $h(v,w)$ jako pierwszą pozycję, na której słowa v i w się różnią (oraz ∞ jeżeli $v = w$). Chcemy, by v i w były "blisko", jeśli różnią się na odległych pozycjach.

Zatem definiujemy

$$d(v,w) = 2^{-h(v,w)},$$

gdzie $2^{-\infty} = 0$.

Zadanie 1 (4 punkty, termin – 11.03)**.** *Pokazać, że* $(\{0,1\}^\omega, d)$ *jest przestrzenią metryczną, czyli że d spełnia aksjomaty metryki.*

Przestrzeń tą czasami nazywa się *przestrzenią Cantora* (w odróżnieniu od *zbioru Cantora*, który jest podzbiorem).

Zadanie 2 (5 punkty, termin – 11.03)**.** *Opisać kule i zbiory otwarte w przestrzeni* $(\{0,1\}^\omega, d)$.

Definicja. Przestrzeń metryczna X jest zwarta, jeżeli każdy ciąg $x_1, x_2, \ldots$ jej elementów ma pewien podciąg który jest zbieżny do jakiegoś elementu tej przestrzeni.

Na przykład, domknięty odcinek jest zwarty, ponieważ każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg monotoniczny, a ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny.

Zadanie 3 (10 punktów, termin – 18.03)**.** *Pokazać, że przestrzeń metryczna* $(\{0,1\}^\omega, d)$ *jest zwartą przestrzenią metryczną.*

Wskazówka. Skorzystać z lematu Königa, który mówi, że w każdym nieskóńczonym drzewie którego każdy wierzchołek ma skończenie wielu synów (niekoniecznie dwóch) istnieje nieskończona ścieżka

Uwaga 1. Analogicznie możnaby dowodzić, że zbiór ścieżek w nieskończonym drzewie stopnia k, czyli przestrzeni $\{0,1,\ldots,k\}^\omega$, jest zwarty, dla $k > 2$.

Definicja. Dwie przestrzenie metryczne X oraz Y są *homeomorficzne* jeżeli istnieje bijekcja $f\colon X \to Y$ która jest ciągła i której odwrotność f^{-1} jest ciągła.

Zadanie 4 (10 punktów, termin – 1.04)**.** *Pokazać, że przestrzeń metryczna* $\{0,1,\ldots,k\}^\omega$ *(czyli zbiór nieskończonych ścieżek w* T*) jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora* $C \subset \mathbb{R}$*.*

Kolorowanie grafów Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskierowanym o zbiorze wierzchołków V oraz zbiorze krawędzi E oraz niech k będzie liczbą naturalną. *Kolorowaniem* grafu G za pomocą k-kolorów jest przyporządkowanie każdej krawędzi $e \in E$ pewnego *koloru* $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ tak, żeby żadne dwie sąsiednie krawędzie nie miały tego samego koloru. Jeżeli takie kolorowanie istnieje, to mówimy, że G jest *k-kolorowalny.*

Na przykład, trójkąt jest 3-kolorowalny ale nie jest 2-kolorowalny.

Zadanie 5 (15 punktów, termin – 6.05)**.** *Niech* G *będzie nieskierowanym grafem o zbiorze wierzchołków* $\bar{N}$*. Pokazać, że* G *jest* k*-kolorowalny wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jego skończony podgraf jest* k*-kolorowalny.*

Uwaga. Chodzi o rozwiązanie korzystające z pojęcia zwartości.
Wskazówka. Częściowo pokolorowany graf odpowiada ścieżce w nieskończonym drzewie stopnia $k+1$, które jest zwarte. Niech G_n będzie podgrafem grafu G wyznaczonym przez wierzchołki $\{1,2,\ldots,n\}$. Ciąg k-kolorowań grafów G_n musi mieć podciąg zbieżny. Granica tego podciągu będzie k-kolorowaniem grafu G.

Kafelkowanie płaszczyzny *Kafelek* jest kwadratem ma cztery boki i każdy bok ma swój *rodzaj*. Dwa kafelki mogą się stykać tylko wzdłuż boków tego samego rodzaju.

Niech X będzie ustalonym skończonym zbiorem kafelków. *Kafelkowanie* płaszczyzny to jest wypełnienie jej całej kafelkami ze zbioru X tak, by sąsiednie kafelki stykały się w dozwolony sposób.

Zadanie 6 (15 punktów, termin – 6.05). *Pokazać, że płaszczyznę się da się wykafelkować wtedy i tylko wtedy, gdy da się wykafelkować dowolnie duże prostokąty.*

Uwaga. Chodzi o rozwiązanie korzystające z pojęcia zwartości.