Zadanie 9: Test istotności dla dwóch średnich, przy próbach sparowanych
10 robotnikom wprowadzono gimnastykę w trakcie pracy. Notowano wyniki pracy przed i w trakcie eksperymentu. Zarząd fabryki chciałby wiedzieć, czy wyniki pracy polepszyły się dzięki gimnastyce. Wyniki pomiarów wydajności pracy i-tego pracownika przed eksperymentem x_{i1} oraz w trakcie eksperymentu x_{i2} podane są w sztukach na godzinę w tabelce poniżej.[1] Przyjmij hipotezę zerową $H_0 : \mu_R = 0$ (wydajność pracy przed i po jednakowa) oraz hipotezę alternatywną $H_1 : \mu_R \neq 0$. Zweryfikuj hipotezę zerową na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

Rozwiązanie: Z wykladu wiemy, ze gdy H_0 jest prawdziwa to statystyka $T = \dfrac{\bar{R} - \mu_0}{S_R}\sqrt{n-1}$ ma rozklad t-Studenta z $n-1$ stopniami swobody, gdzie $\bar{R} = \dfrac{1}{n}\sum_i^n (X_{i1} - X_{i2})$ oraz $S_R^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n (R_i - \bar{R})^2 = \frac{1}{n}\sum_i^n R_i^2 - \bar{R}^2$.

i	x_{i1}	x_{i2}	$r_i = x_{i1} - x_{i2}$	r_i^2
1	28	32	-4	16
2	27	30	-3	9
3	24	24	0	0
4	27	28	-1	1
5	26	28	-2	4
6	22	24	-2	4
7	30	29	1	1
8	26	24	2	4
9	25	27	-2	4
10	26	29	-3	9
$\sum$			-14	52

Z danych mamy $\bar{R} = -1.4$ oraz $S_R^2 = 5.2 - (-1.4)^2 = 3.24$ zatem $T = \dfrac{-1.4}{\sqrt{3.24}}\sqrt{9} = -2.333$ ponadto $t(1 - \frac{\alpha}{2}, n-1) = t(0.975, 9) = 2.262$ zatem obszar krytyczny to $W = (-\infty, -2.262) \cup (2.262, \infty)$ skoro $T \in W$ to odrzucamy H_0 na rzecz $H_1 : \mu_R \neq 0$

Zadanie 11.

Rozwiązanie. Szansa na odrzucenie w laboratorium jeśli hipoteza zerowa była prawdziwa to 0.05. Szansa żeby żadne laboratorium nie odrzuciło to 0.95^{100}, tak więc szansa, że przynajmniej jedno odrzuciło to $1 - 0.95^{100}$.

Zadanie 10.

Rozwiązanie.

- Iloraz wiarogodności to:

$$l(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left(\frac{n(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma^2}\left(\bar{x} - \frac{\mu_0 + \mu_1}{2}\right)\right)$$

  Mamy więc

$$l(x_1, \ldots, x_n) > c \Leftrightarrow \bar{x} > d(c)$$

  Nie ma dla nas znaczenia jak d zależy od c. Kładziemy $d = \mu_0 + \frac{z\sigma}{\sqrt{n}}$, gdzie z to kwantyl rzędu 0.95 standardowego rozkładu normalnego, czyli $d = \mu_0 + \frac{1.64\sigma}{\sqrt{n}}$. W naszym teście będziemy odrzucać H_0 jeśli $\bar{x} > d$. To jest test o poziomie istotności 0.05. Z lematu Neymana-Pearsona jest to test jednoznacznie najmocniejszy.

- Moc naszego testu to $1 - \Phi(1.64 - \sqrt{n}\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma})$, gdzie Φ to dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego.

- Chcemy $\Phi(1.64 - \sqrt{n}\frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}) < 0.05$.

Zadanie 1:

Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(m, 2^2)$. Hipotezę H_0: $m = 1$ przy alternatywie H_1: $m = 3$ będziemy weryfikować, wykorzystując test o zbiorze krytycznym postaci $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : \sum_{i=1}^n x_i > k_\alpha\}$. a) Wyznacz k_α, aby otrzymać test o rozmiarze 0.05. b) Jak dużą próbę losową należy pobrać, aby uzyskać test o mocy nie mniejszej niż 0.95?

Rozwiązanie:

a) Niech $\alpha = 0.05$, $X = (X_1, ..., X_n)$, zaś K oznacza nasz zbiór krytyczny. Z definicji rozmiaru testu otrzymujemy

$$\alpha = \mathbb{P}(X \in K | H_0) = \mathbb{P}(\textstyle\sum_{i=1}^n X_i > k_\alpha) = 1 - \mathbb{P}(\sum_{i=1}^n X_i \leqslant k_\alpha)$$

Skoro $X_i \sim N(1, 2^2)$ przy założeniu H_0, to zakładając niezależność zmiennych $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n, 2^2 n)$. Zatem

$$1 - \alpha = \mathbb{P}(\textstyle\sum_{i=1}^n X_i \leqslant k_\alpha) = \Phi\left(\frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad z_{1-\alpha} = \frac{k_\alpha - n}{2\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad k_\alpha = 2z_{1-\alpha}\sqrt{n} + n$$

gdzie Φ jest dystrybuantą rozkładu $N(0,1)$, zaś $z_{1-\alpha} \approx 1.6449$ jest kwantylem rozkładu $N(0,1)$ rzędu $1 - \alpha$.

b) Z lematu *Neymana-Pearsona* wiemy że test ilorazu wiarogodności jest TJNM. Korzystając ze wzoru na moc tego testu (ze skryptu prof. Niemiro, wzór 8.2.4) na poziomie istnotności α otrzymujemy

$$1 - \beta(3) = 1 - \Phi\left(z_{1-\alpha} - \sqrt{n}\frac{3-1}{2}\right) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{n})$$

Chcemy aby

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{n}) &\geqslant 0.95 = 1 - \alpha \\ \alpha &\geqslant \Phi(z_{1-\alpha} - \sqrt{n}) \\ z_\alpha &\geqslant z_{1-\alpha} - \sqrt{n} \\ \sqrt{n} &\geqslant 2z_{1-\alpha} \\ n &\geqslant 4z_{1-\alpha}^2 \approx 10.823 \end{aligned}$$

Czyli wystarczy wziąć $n \geqslant 11$.

□

Zmienna losowa X ma gęstość

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\delta_{(0,\theta)}(x),$$

gdzie $\delta(0,\theta)(x)$ to funkcja przyjmująca wartość 1 dla $x \in (0,\theta)$ i 0 dla x spoza tego przedziału, a θ jest nieznanym parametrem. Niech c będzie ustaloną dodatnią stałą. Test polega na tym, że jeśli $X \geq c$, to należy przyjąć hipotezę alternatywną $H_1 : \theta = 4$, a gdy $X < c$, należy przyjąć hipotezę zerową, $H_0 : \theta = 2$. Obliczyć a) prawdopodobieństwa błędów pierwszego i drugiego rodzaju (α i β), b) moc testu, c) β, gdy $\alpha = 0.05$.

Rozwiązanie: X ma rozkład jednostajny na $(0,\theta)$.

a) prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju: H_0 jest prawdziwe, więc prawdopodobieństwo, że odrzucimy H_0 to $P(X \geq c|\theta = 2)$. A to jest równe $\max(0, \frac{\theta - c}{\theta})$. Więc

$$\alpha = 0 \quad \text{dla } c > 2$$

$$\alpha = 1 - \frac{c}{2} \quad \text{wpp}$$

Popełniamy błąd drugiego rodzaju gdy H_1 jest prawdziwe, a przyjmujemy H_0. A to wynosi $P(x < c|\theta = 4)$. A to jest równe $\min(1, \frac{c}{\theta})$. Więc

$$\beta = 1 \quad \text{dla } c > 4$$

$$\beta = \frac{c}{4} \quad \text{wpp}$$

b) Moc testu to prawdopodobieństwo że wykryjemy że H_0 jest fałszywe w sytuacji w której H_0 jest fałszywe. Czyli to prawdopodobieństo że nie popełnimy błędu drugiego rodzaju jeśli H_0 jest fałszywe. Więc można je zapisać wzorem $1 - \beta$. Przepisując powyższe wyniki:

$$1 - \beta = 0 \quad \text{dla } c > 4$$

$$1 - \beta = 1 - \frac{c}{4} \quad \text{wpp}$$

c) Wystarczy wyznaczyć parametr c i podstawić do wzoru:

$$\alpha = 1 - \frac{c}{2} = 0.05$$

$$0.95 = \frac{c}{2}$$

$$c = 1.9$$

Zgadza się, że znalezione c spełnia $c \leq 2$, więc mogliśmy skorzystać z równości $\alpha = 1 - \frac{c}{2}$. Podstawmy znalezione c do wzoru na β:

$$\beta = \frac{c}{4} = 1.9/4 = 0.475$$

a to wartość którą należało wyznaczyć.

Wiadomo, że jeśli X ma rozkład $N(0,1)$ oraz Z jest niezależne od X o rozkładzie $\chi^2(k)$ to zmienna losowa $T = \frac{X}{\sqrt{Z/k}}$ ma rozkład t–studenta o k stopniach swobody. Korzystając z powyższego faktu pokaż że dla próby prostej $X_1, \ldots X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$

$$\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\mu}{S_n}$$

ma rozkład t-studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Rozwiązanie:

$$\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\mu}{S_n} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{S_n^2/(n-1)}} =$$

$$= \frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}/(n-1)}}$$

Zgodnie z zadaniem 12 (w którym niestety autor popełnił błąd w treści), S_n^2 ma rozkład $\sigma^2 \cdot \chi^2(n-1)$, i jest niezależna od $\bar{X}$. Więc zmienne $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ i $\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ również są niezależne. $\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ ma rozkład $\chi^2(n-1)$. $\bar{X}$ jako średnia iid zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma rozkład $N(\mu, \sigma^2)$. Więc $\bar{X}-\mu$ ma rozkład $N(0, \sigma^2)$. Więc $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ ma rozkład $N(0,1)$. Więc $\frac{\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}}{\sqrt{\frac{S_n^2}{\sigma^2}/(n-1)}}$ ma rozkład t-studenta o $n-1$ stopniach swobody. A to kończy dowód.