Zadanie 1:
Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą losową z rozkładu normalnego $N(m, 2^2)$. Hipotezę $H_0 : m = 1$ przy alternatywie $H_1 : m = 3$ będziemy weryfikować, wykorzystując test o zbiorze krytycznym postaci $\{(x_1, x_2, ..., x_n) : \sum_{i=1}^{n} n_i > k_\alpha\}$.

- Wyznacz k_α, aby otrzymać test o rozmiarze 0,05.
- Jak dużą próbę losową należy pobrać, aby uzyskać test o mocy nie mniejszej niż 0,95?

Definicja: Dla parametru θ, $\Theta_0 \subset \Theta$ zbioru wartości parametrów, hipotezy zerowej $H_0 : \theta \in \Theta_0$, statystyki testowej X i danego regionu krytycznego K, rozmiar testu to prawdopodobieństwo $sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}(X \in K | H_0)$. Rozmiar testu jest zatem największym prawdopodobieństwem popełnienia-błędu I rodzaju. Dla prostej hipotezy zerowej $H_0 : \theta = \theta_0$, rozmiar testu jest po prostu prawdopodobieństwem popełnienia błędu I rodzaju. Jednocześnie tak zwanazasada domniemania prawdziwości H_0 oznacza, że rozmiar testu nie przekroczy poziomu istotności $\alpha : sup_{\theta \in \Theta_0} \{\mathbb{P}(X \in K | H_0)\} \leq \alpha$.

Rozwiązanie:

Z wykładu wiemy, że $\overline{X}$ (średnia z próby) jest nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej X i ma rozkład $N(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$. Ponadto zmienna losowa

$$U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma} \sqrt{n}$$

ma rozkład $N(0, 1)$.

Chcemy zweryfikować czy nasza próba losowa pochodzi z rozkładu $N(1, 2^2)$ czy $N(3, 2^2)$. Wykonujemy więc test jednostronny i obszar krytyczny W umieszczamy po prawej stronie (czyli jeśli nasza statystyka testowa będzie duża to wtedy z dużym prawdopodobieństwm będziemy mogli odrzucić H_0).

Rozmiar testu ma być równy $\alpha = 0.05$, więc:

$$\mathbb{P}(U < q(1 - \alpha) | H_0) = 0.95$$

$$\mathbb{P}(\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma} \sqrt{n} < q(1 - \alpha) | H_0) = 0.95$$

U ma rozkład normalny standardowy, więc kwantyl rzędu 0.95 wynosi $q(1 - \alpha) \approx 1.64$. Po podstawieniu znanych σ, m_0, mamy:

$$\mathbb{P}(\frac{\overline{X} - 1}{2} \sqrt{n} < 1.64 | H_0) = 0.95$$

$$\mathbb{P}(\overline{X} < \frac{3.28}{\sqrt{n}} + 1 | H_0) = 0.95$$

$$\mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} < \frac{3.28}{\sqrt{n}} + 1 | H_0) = 0.95$$

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i < 3.28\sqrt{n} + n | H_0) = 0.95$$

Zatem $k_\alpha = 3.28\sqrt{n} + n$

Moc testu z definicji to prawdopodobieństwa odrzucenia H_0 pod warunkiem, że hipoteza alternatywna H_1 jest prawdziwa. W naszym przypadku ma być ona większa niż 0.95, co mozemy zapisać jako:

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i > k_\alpha | H_1) > 0.95.$$

Mamy więc:

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i > 3.28\sqrt{n} + n | H_1) > 0.95.$$

Zauważmy, że suma zmiennych losowych $\sum_{i=1}^{n} X_i$ o rozkładzie $N(3, 2^2)$ ma rozkład $N(3n, (2\sqrt{n})^2)$. Możemy więc wystandaryzować lewą stronę i otrzymać:

$$\mathbb{P}(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 3n}{2\sqrt{n}} > \frac{3.28\sqrt{n} + n - 3n}{2\sqrt{n}} | H_1) > 0.95$$

$$\mathbb{P}(U > 1.64 - \sqrt{n} | H_1) > 0.95$$

gdzie U to zmienna losowa o rozkładzie $N(0, 1)$. Mamy więc:

$$1 - F_U(1.64 - \sqrt{n}) > 0.95$$

$$0.05 > F_U(1.64 - \sqrt{n})$$

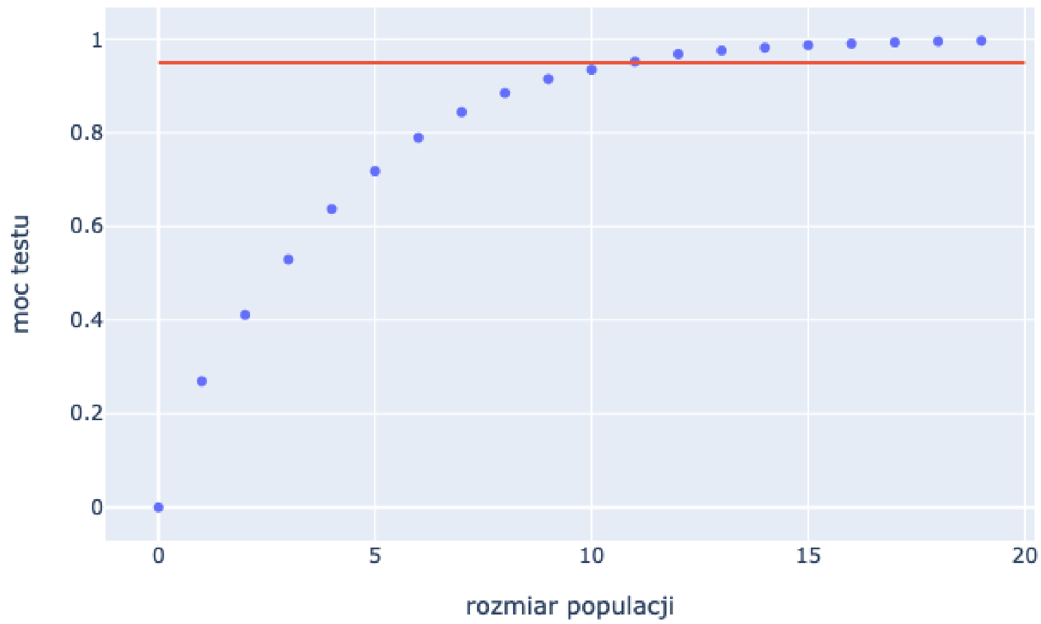
Z tablic wiemy, że dystrybuanta rozkładu standardowego normalnego jest mniejsza niż 0.05 dla -1.64, więc:

$$1.64 - \sqrt{n} < -1.64$$

$$3.28 < \sqrt{n}$$

$$10.76 < n$$

Tak więc, aby przy poziomie istotności $\alpha = 0.05$ uzyskać test o mocy co najmniej 0.95 potrzebujemy próbki o rozmiarze co najmniej 11.



Zadanie 2:
Wyhodowano nową odmianę pewnej roślinu. Hipotezę, że kiełkuje 70% sadzonek, wobec hipotezy alternatywnej, że kiełuje więcej niż 70%, testowo na podstawie próbki 10 sadzonek. Hipotezę zerową odrzucamy, gdy wykiełuje 8 lub więcej sadzonek.

- Czy rozmiar tego testu jest mniejszy niż 0,05?
- Jaki jest rozmiar innego testu, który odrzuca hipotezę zerową, jeśli wszystkie sadzonki wykiełują?

Rozwiązanie:

Przyjmujemy dwie hipotezy:
$\mathrm{H}_0 : \theta = \frac{7}{10}$
Wobec hipotezy alternatywnej
$\mathrm{H}_1 : \theta > \frac{7}{10}$.
Rozmiar testu jest po prostu prawdopodobieństwem popełnienia błędu I rodzaju. Hipotezę odrzucamy jeśli wyrośnie więcej niż 7 sadzonek. Czyli chcemy policzyć:

$$\sup_{\theta\in\Theta}\{\mathbb{P}(X \geq 8|H_0)\} = \sup_{\theta\in\Theta}\{\mathbb{P}(X \geq 8|\theta = \frac{7}{10}\}.$$

Gdzie X to zmienna losowa X = {n : wyrosło n sadzonek}.
Czyli X liczy ile sadzonek urosło.

Zatem

$$\mathbb{P}(X \geq 8|\theta = \frac{7}{10}) = \mathbb{P}(X = 8) + \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10)$$

W tym momencie X jest zmienną o rozkładzie Beronouliego z prawdopodbieństwem sukcesu $\frac{7}{10}$.

$$\mathbb{P}(X=8)+\mathbb{P}(X=9)+\mathbb{P}(X=10) = \binom{10}{8}\cdot(\frac{7}{10})^8\cdot(\frac{3}{10})^2+\binom{10}{9}\cdot(\frac{7}{10})^9\cdot(\frac{3}{10})^1+\binom{10}{10}\cdot(\frac{7}{10})^{10} = 0,2824...$$

Ostatecznie rozmair testu wyszedł zdecydownie większy niż 0,05. Jest to dość intulicyjne, że prawdopodobieństwo błędu pierwszego rodzaju jest duże: Jak losujemy z $p = \frac{7}{10}$, to dość prawdopodobne jest wylosowanie 8 z 10 sadzonek.

W drugim podpunkcie odrzucamy hipotezę kiedy wszystkie sadzonki wykiełują czyli chcemy policzyć:

$$\mathbb{P}(X \geq 10|\theta = \frac{7}{10}) = \mathbb{P}(X = 10|\theta = \frac{7}{10})$$

Ponieważ zmienna losowa X nie przyjmuje większych wartości niż 10.

$$\mathbb{P}(X = 10|\theta = \frac{7}{10}) = (\frac{7}{10})^{10} = 0,02824...$$

Zadanie 3:
Test najmocniejszy

Populacja ma rozkład opisany funkcją gęstości postaci $f(x) = \beta e^{(-\beta x)}$ dla $x > 0$ tej populacji wylosowano dziesięcio elementową próbę:

$$1 \quad 0.8 \quad 1.7 \quad 5.5 \quad 1.9 \quad 8.1 \quad 2.6 \quad 2.5 \quad 1.4 \quad 2.4$$

Przetestuj, wykorzystując test najmocniejszy przy poziome istotności $\alpha = 0.05$ hipotezę zerową, że $\beta = 0.5$, przeciw hipotezie alternatywnej, że $\beta = \frac{1}{3}$

Rozwiązanie:

Funkcja $f(x) = \beta e^{(-\beta x)}$ dla $x > 0$ opisuje rozkład wykładniczy z parametrem β Mamy również próbę prostą $X_1, \ldots X_n$ rozmiaru n = 10.

Chcemy przetestować hipotezę zerową $H_0 : \beta_0 = 0.5$ przeciw hipotezie alternatywnej, że $\beta_1 = \frac{1}{3}$

W tym celu stosując test najmocniejszy, nawiązują do lematu Neymana-Pearsona, test najmocniejszy dla hipotezy punktowej jest testem ilorazu wiarygodności.

Można zapisać go jako

$$\lambda(x) = \frac{L(x \mid \beta_0)}{L(x \mid \beta_1)}$$

gdzie: $\lambda(x)$ jest statystyką testową.

Obszar krytyczny otrzymuje z nierówności $\alpha = \mathbb{P}(\lambda(x) > k) \iff 1 - \mathbb{P}(\lambda(x) \leq k) = 1 - \alpha$

$$\lambda(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \beta_0 e^{-\beta_0 X_i}}{\prod_{i=1}^n \beta_1 e^{-\beta_1 X_i}} = \left(\frac{\beta_0}{\beta_1}\right)^n \exp\left((\beta_1 - \beta_0)\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq k$$

$$\exp\left((\beta_1 - \beta_0)\sum_{i=1}^n X_i\right) \leq k\left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^n$$

$$(\beta_1 - \beta_0)\,(\sum_{i=1}^n X_i) \leq \ln(k\left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^n)$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq \frac{\ln(k) + n\ln\beta_1 - n\ln\beta_0}{(\beta_1 - \beta_0)} = c_1$$

BSO $\beta_1 > \beta_0$ dla (odwrócenie nierówności)

Wiemy z wykładu z RP, że jeżeli $X_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ to suma zmiennych niezależnych $X_1, \ldots X_n$ z takim rozkładem jest $X \sim \Gamma(\lambda,\, n)$. Z drugiej strony: Jeżeli $X \sim \Gamma(\frac{\mu}{2},\, \frac{1}{2})$ wtedy $X \sim \chi^2(\mu)$, z μ stopniami swobody. W naszym przypadku $\beta_0 = \frac{1}{2}$ i $\frac{\mu}{2} = 10$, wówczas nasza $X \sim \chi^2(20)$ Odczytuje kwantyl na poziome 0.95 z $\chi^2(20)$, wówczas $c_1 = 31.41043$

Jednak suma X wynosi:

$$X = 27.6$$

Wracając do oryginalnego testu, nie odrzucamy hipotezy H_0, ponieważ $X \leq c_1$ $\square$

Zadanie 4:
Skonstruuj test ilorazu wiarygodności dla rozkładu wielomianowego. Przyjmij hipotezy

- Zerową $H_0 : \; p = [p_1(\theta), \ldots, p_k(\theta)], \; \theta \in \omega_0$
- Alternatywną $H_1 : \; p \neq [p_1(\theta), \ldots, p_k(\theta)], \; \theta \in \omega_0$, nie czyni żadnych założeń o prawdopodobieństwach p, poza $\sum_i p_i = 1, \; \Omega = \{[p_1, \ldots, p_k] \mid \sum_i p_i = 1\}$

Rozwiązanie: Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ będzie próbą z zadanego rozkładu, przy czym X_i oznacza ilość losowań typu i, przy czym $\sum_i X_i = n$. Wiarygodność wtedy to $L(X, \theta) = f(X|\theta) = f(X_1, \ldots, X_k | p_1(\theta), \ldots, p_k(\theta)) = \binom{n}{X_1, \ldots, X_k} \prod_i p_i(\theta)^{X_i}$. Niech $\dot{\theta}$ i $\hat{\theta}$ będą takie, że

$$L(X, \dot{\theta}) = \sup_{\theta \in \omega_0} L(X, \theta) \quad \text{oraz} \quad L(X, \hat{\theta}) = \sup_{\theta \in \Omega} L(X, \theta).$$

Wobec definicji $\hat{\theta}$ jest Estymatorem Największej Wiarygodności parametru θ. Rozważmy więc

$$l(X, \theta) = \log(L(X, \theta)) = \log(n!) - \sum_i \log(X_i!) + \sum_i X_i \log(p_i(\theta)).$$

Logarytm jest funkcją monotoniczną, zatem maksymalizowanie l dla $\sum_i p_i = 1$ wystarczy, by zmaksymalizować L przy tym warunku. Użyjemy zatem mnożników Lagrange'a:

$$\mathcal{L}(p_1, p_2, \ldots, p_k, \lambda) = l(X, \theta) + \lambda(1 - \sum_i p_i)$$
$$\mathcal{L}(p_1, p_2, \ldots, p_k, \lambda) = \log(n!) - \sum_i \log(X_i!) + \sum_i X_i \log(p_i) + \lambda(1 - \sum_i p_i),$$

zauważmy, że dla każdego i zachodzi $\mathcal{L}'_{p_i}(p_1, p_2, \ldots, p_k, \lambda) = X_i \frac{1}{p_i} - \lambda$. Chcemy, aby dla każdego i wartość $\mathcal{L}'_{p_i}(p_1, p_2, \ldots, p_k, \lambda)$ wynosiła 0. Otrzymujemy zatem $p_i = \frac{X_i}{\lambda}$, co w połączeniu z warunkiem $\sum_i p_i = 1$ daje $\sum_i p_i = \sum_i \frac{X_i}{\lambda} = \frac{n}{\lambda} = 1$, skąd $\lambda = n$, zatem ostatecznie $p_i = \frac{X_i}{\lambda}$, wobec czego $\hat{\theta}$ jest takie, że $p(\hat{\theta}) = [p_1(\hat{\theta}), \ldots, p_k(\hat{\theta})] = \left[\frac{X_1}{n}, \ldots, \frac{X_k}{n}\right]$. Możemy więc skonstruować iloraz wiarygodności Λ, zadany przez

$$\Lambda = \frac{\sup_{\theta \in \omega_0} L(X, \theta)}{\sup_{\theta \in \Omega} L(X, \theta)} = \frac{L(X, \dot{\theta})}{L(X, \hat{\theta})},$$

skąd

$$\Lambda = \frac{\binom{n}{X_1,\ldots,X_k}\prod_i p_i(\dot{\theta})^{X_i}}{\binom{n}{X_1,\ldots,X_k}\prod_i p_i(\hat{\theta})^{X_i}} = \frac{\prod_i p_i(\dot{\theta})^{X_i}}{\prod_i \left(\frac{X_i}{n}\right)^{X_i}}.$$

Wiemy, że ogólny test ilorazu wiarygodności przyjmuje region krytyczny tam, gdzie $\Lambda \leqslant \lambda_0(\alpha)$, gdzie $\lambda_0(\alpha)$ wybieramy tak, by $P(\Lambda \leqslant \lambda_0(\alpha)|H_0) = \alpha$, przy zadanym poziomie istotności α, zatem dla tak obranego $\lambda_0 = \lambda_0(\alpha)$, hipotezę zerową odrzucamy, gdy jej iloraz wiarygodności Λ jest mniejszy bądź równy λ_0. Aby być w stanie wyznaczyć λ_0 w zadany sposób, musimy znać rozkład Λ. Zauważmy jednak, że nierówność $\Lambda \leqslant \lambda_0$ jest równoważna nierówności $-2\ln(\Lambda) \geqslant -2\ln(\lambda_0)$, więc $P(-2\ln(\Lambda) \geqslant -2\ln(\lambda_0)|H_0) = \alpha$. Rozważmy funkcję $g(x) = x\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$. Ze wzoru Taylora dla x leżących blisko x_0, zachodzi $g(x) \approx (x - x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2x_0}$. Wobec tego zakładając prawdziwość H_0 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
-2\ln(\Lambda) &= 2\sum_i X_i \ln\left(\frac{p_i(\hat{\theta})}{p_i(\dot{\theta})}\right)\\
&= 2n\sum_i \frac{X_i}{n}\ln\left(\frac{p_i(\hat{\theta})}{p_i(\dot{\theta})}\right)\\
&= 2n\sum_i p_i(\hat{\theta})\ln\left(\frac{p_i(\hat{\theta})}{p_i(\dot{\theta})}\right)\\
&= 2n\sum_i g_i(p_i(\hat{\theta})) \qquad \text{dla } g_j(x) = x\ln\left(\frac{x}{p_j(\dot{\theta})}\right)\\
&\approx 2n\sum_i (p_i(\hat{\theta}) - p_i(\dot{\theta})) + n\sum_i \frac{\left(p_i(\hat{\theta}) - p_i(\dot{\theta})\right)^2}{p_i(\dot{\theta})}\\
&= 2n\left(\sum_i p_i(\hat{\theta}) - \sum_i p_i(\dot{\theta})\right) + \sum_i \frac{n^2\left(p_i(\hat{\theta}) - p_i(\dot{\theta})\right)^2}{np_i(\dot{\theta})}\\
&= \sum_i \frac{\left(np_i(\hat{\theta}) - np_i(\dot{\theta})\right)^2}{np_i(\dot{\theta})}\\
&= \sum_i \frac{(X_i - E_i)^2}{E_i},
\end{aligned}$$

gdzie $E_i = np_i(\dot{\theta})$ interpretujemy jako oczekiwaną liczbę losowań typu i. Otrzymujemy zatem statystykę χ^2, której rozkład dąży do rozkładu $\chi^2(\dim(\Omega) - \dim(\omega_0))$, a w naszym przypadku konkretnie do rozkładu $\chi^2(k - m - 1)$, gdzie m to wymiar θ. Hipotezę zerową odrzucamy więc, gdy χ^2 jest większa bądź równa $-2\ln(\lambda_0)$, które wyznaczamy z zależności $\alpha = P(\chi^2 \geqslant -2\ln(\lambda_0))$.

Zadanie 5:
Pokazać, że przy hipotezie zerowej spełnionej, iloraz wiarogodności w teście dla rozkładu wielomianowego i statystyka w teście zgodności Pearsona są asymptotycznie równoważne.

Rozwiązanie: Jako, że będziemy dowodzić równoważności ilorazu wiarogodności i statystyki zgodności Pearsona to teza musi być hipotezą zgodną z testem zgodności:

$$H_0 : P(\tilde{X}) = P_{\theta_0}(\tilde{X}),$$

$$H_1 : P\tilde{X}) \neq P_{\theta_0}(\tilde{X}).$$

Niech $w_0 \subset \Omega$ oznacza zbiór parametrów θ, które są zgodne z hipotezą zerową H_0(w tym przypadku singleton θ_0), a $w_1 \subset \Omega$ zbiór parametrów θ, które należą do hipotezy alternatywnej H_1.

Niech $X = X_1 ... X_N$ będzie próbą prostą z rozkładu $Multinomial(n, p_1, ...p_k)$.

Wtedy test zgodności Pearsona określamy wzorem:

$$\chi^2 = \sum_{i}^{k} \frac{(n_i - N \cdot n \cdot p_{i,\theta_0})^2}{N \cdot n \cdot p_{i,\theta_0}},$$

gdzie $N \cdot n$ to całkowita liczba wyników (N eksperymentów po n wyników), p_{i,θ_0} to prawdopodobieństwo i-tej klasy według H_0, a n_i to zgrupowana po wszystkich eksperymentach liczebność klasy i.

Z wykładu wiemy, że iloraz wiarogodności dla rozkładu wielomianowego jest asymptotycznie równy:

$$-2 \ln \Lambda = 2N \cdot n \sum_{i=1}^{k} [\hat{p}_i \ln \frac{\hat{p}_i}{p_{i,\theta_0}}],$$

gdzie $\hat{p}_i = \dfrac{n_i}{N \cdot n}$ dla $i = 1, 2, ... k$.

Możemy również przedstawić test Pearsona jako zależny od $\hat{p}_i$:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} N \cdot n \frac{(\hat{p}_i - p_{i,\theta_0})^2}{p_{i,\theta_0}}.$$

Rozważmy $-2 \ln \Lambda$ jako funkcję od $\hat{p}$, nazwijmy ją $\lambda = -2 \ln \Lambda$. Rozwiniemy ją korzystając ze wzoru Taylora w punkcie p_{θ_0}:

$$\lambda(\hat{p_1}, ..., \hat{p_k}) = 2N \cdot n \sum_{i=1}^{k} \hat{p}_i \ln \frac{\hat{p}_i}{p_{i,\theta_0}},$$

$$\lambda(\hat{p_1}, ..., \hat{p_k}) = 0 + \sum_{i=1}^{k} 2N \cdot n(\hat{p}_i - p_{i,\theta_0}) + \sum_{i=1}^{k} \frac{N \cdot n}{p_{i,\theta_0}} (\hat{p}_i - p_{i,\theta_0})^2 + R_2.$$

Jako, że prawdopodobieństwa sumują się do 1 to $\sum_{i=1}^{k} 2N \cdot n(\hat{p}_i - p_{i,\theta_0}) = 0$. Kolejny element sumy to χ^2, co za tym idzie:

$$-2 \ln \Lambda = \chi^2 + R_2.$$

Przy założeniu spełnionej hipotezy zerowej $\hat{p} \xrightarrow{N \to \infty} p_{\theta_0}$, z tego wynika, że $R_2 \xrightarrow{N \to \infty} 0$. W ten sposób opisywane statystyki są asymptotycznie równoważne: $-2 \ln \Lambda \approx \chi^2$.

Zadanie 6:

Zmienna losowa X ma gęstość

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \delta_{(0,\theta)}(x)$$

gdzie $\delta_{(0,\theta)}(x)$ to funkcja przyjmująca wartość 1 dla $x \in (0, \theta)$ i 0 dla x spoza tego przedziału, a θ jest nieznanym parametrem. Niech c będzie ustaloną dodatnią stałą. Test polega na tym, że jeśli $X \geq c$, to należy przyjąć hipotezę alternatywną $H_1 : \theta = 4$, a gdy $X < c$, należy przyjąć hipotezę zerową, $H_0 : \theta = 2$. Obliczyć a) prawdopodobieństwo błedów pierwszego i drugiego rodzaju (α i β), b) moc testu, c) β, gdy $\alpha = 0.05$.

Rozwiązanie:

(a) Funkcję gęstości dla hipotezy zerowej i alternatywnej to odpowiednio: $f_2(x) = \frac{1}{2}\delta_{(0,2)}(x)$ i $f_4(x) = \frac{1}{4}\delta_{(0,4)}(x)$. X należy do zbioru W odrzuceń H_0, gdy $X \in [c, \infty)$. Stąd z definicji z wykładu błąd pierwszego rodzaju wynosi:

$$\alpha = \int_W f_2(x)dx = \int_c^2 \frac{1}{2}\delta_{(0,2)}(x)dx = \max\left(\frac{1}{2}(2-c),\, 0\right)$$

Natomiast błąd drugiego rodzaju β wynosi:

$$\beta = \int_{\mathbb{R}\setminus W} f_4(x)dx = \int_0^c \frac{1}{4}\delta_{(0,4)}(x)dx = \min\left(\frac{1}{4}\cdot c,\, 1\right)$$

(b) Moc testu wynosi

$$1 - \beta = \max\left(1 - \frac{1}{4}\cdot c,\, 0\right)$$

(c) dla $\alpha = 0.05$

$$\alpha = \frac{1}{2}(2-c),$$

stąd $c = 1,9$ podstawiając do wzoru na błąd drugiego rodzaju otrzymujemy $\beta = 0,475$

Zadanie 7:

Cena pewnego wyrobu jest różna w zależności od punktu sprzedaży. Przyjęto, że cena w wylosowanym punkcie sprzedaży jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Po obliczeniu średniej i wariancji z 15 wylosowanych punktów sprzedaży otrzymano $\overline{X} = 2.5, \hat{S}^2 = 1.8$. Na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ zweryfikuj hipotezę, że wahania cen (mierzone wariancją) są równe 1, przeciwko hipotezie, że są większe od 1. Wskazówka. $\chi^2(0.95, 14) = 23.685$.

Zostało do rozwiązania jeśli ktoś by chciał dodatkowy punkt za aktywność :)

Zadanie 8:

Według teorii Profesora Genka, komórki macierzyste pewnego organizmu różnicują się na 5 typów dojrzałych komórek, z prawdopodobieństwami: $p_1 = 7/16$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = p_4 = 1/8$, $p_5 = 1/16$. Przeprowadzono 496 niezależnych powtórzeń eksperymentu różnicowania i w 212 powtórzeniach powstała komórka typu 1, w 123 powstała komórka typu 2, w 62 typu 3, w 45 typu 4, oraz w 54 powtórzeniach powstały komórki typu 5. Testem 2 na poziomie istotności = 0.01 zweryfikować hipotezę H0, że teoria Genka dobrze opisuje zjawisko zderzeń. Wskazówka. $\chi^2(0.99, 4) = 13.277$.

Rozwiązanie:

H$_0$: Teoria Genka dobrze opisuje zjawisko zdarzeń. (Zjawisko ma rozkład prawdopodobieństwa zgodny z rozkładem prawdopodobieństwa zadanym w poleceniu.)

H$_1$: Teoria Genka nie opisuje dobrze zjawiska zdarzeń. (Zjawisko ma rozkład prawdopodobieństwa niezgodny z rozkładem prawdopodobieństwa zadanym w poleceniu.)

Liczba klas: $k = 5$
Liczba nieznanych parametrów rozkładu: $l = 0$

Liczba stopni swobody df = $k - l - 1 = 4$

Tabela 1. Tabela liczebności dla danych zaobserwowanych:

typ	1	2	3	4	5	suma
liczebność	212	123	62	45	54	496

Tabela 2. Tabela kontyngencji przy założeniu H0 ma postać:

typ	1	2	3	4	5	suma
liczebność	217	124	62	62	31	496

Obliczam statystykę chi kwadrat przy pomocy:

$$\chi^2 = \sum_{n=1}^{k} \frac{(n_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i}$$

dla i = 1, 2, ..., k i gdzie liczebność w klasie i-tej jest oznaczona n_i oraz n = $\sum_{n=1}^{k} n_i$.

Zatem do wzoru za n_i podstawiam wartości z tabeli 1., a za wartości $n \cdot p_i$ wstawiam wartości z tabeli 2 (czyli liczebności jakich oczekujemy przy założeniu H_0).
Otrzymuję (dla df = 4) : $\chi^2 = 21.8491$ oraz p-value = 0.0002.
Ze wstazówki wiemy, że χ^2(0.99, 4) = 13.277. Zatem zbiór krytyczny (odrzuceń H_0) mamy dla przedziału $[13.277, \infty)$.

21.8491 > 13.277 zatem statystyka wpada w zbiór krytyczny. Odrzucam więc H_0 i przyjmuję H_1: Teoria Genka nie opisuje dobrze zjawiska zdarzeń.

Zadanie 9:

10 robotnikom wprowadzono gimnastykę w trakcie pracy. Notowano wyniki pracy przed i w trakcie eksperymentu. Zarząd fabryki chciałby wiedzieć, czy wyniki pracy polepszyły się dzięki gimnastyce. Wyniki pomiarów wydajności pracy i-tego pracownika przed eksperymentem x_{i1} oraz w trakcie eksperymentu x_{i2} podane są w sztukach na godzinę w tabelce poniżej. Przyjmij hipotezę zerową $H_0 : \mu_R = 0$ (wydajność pracy przed i po jednakowa) oraz hipotezę alternatywną $H_1 : \mu_R \neq 0$. Zweryfikuj hipotezę zerową na poziomie istotności $\alpha = 0.05$.

i	x_{i1}	x_{i2}	$r_i = x_{i1} - x_{i2}$	r_i^2
1	28	32	-4	16
2	27	30	-3	9
3	24	24	0	0
4	27	28	-1	1
5	26	28	-2	4
6	22	24	-2	4
7	30	29	1	1
8	26	24	2	4
9	25	27	-2	4
10	26	29	-3	9
Σ			-14	52

Rozwiązanie:

1. z założeniem o rozkładzie normalnym:

Załóżmy, że różnice w wydajności robotników przed i po eksperymencie można opisać rozkładem normalnym. W takim wypadku możemy zastosować test t-studenta dla wartości sparowanych.

Policzmy statystykę $T = \frac{\bar{r}}{S_r}\sqrt{n-1}$, gdzie:

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i = \frac{1}{10}\cdot(-14) = -\frac{7}{5}$$

$$S_r{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i{}^2 - 2\bar{r}\sum_{i=1}^{n} r_i + \sum_{i=1}^{n}\bar{r}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i{}^2}{n} - 2\bar{r}^2 + \bar{r}^2 =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i{}^2}{n} - \bar{r}^2 = \frac{52}{10} - \frac{49}{25} = \frac{81}{25} = \left(\frac{9}{5}\right)^2$$

A zatem: $T = \left(-\frac{7}{5}\right)\cdot\frac{5}{9}\cdot\sqrt{9} = -\frac{7\cdot5\cdot3}{5\cdot9} = -\frac{7}{3} \approx -2.33$

Dla $\alpha = 0.05$ i 9 stopni swobody przedział nieodrzucenia hipotezy zerowej wynosi $[-2.26, 2.26]$, a zatem należałoby odrzucić H_0 i przyjąć hipotezę alternatywną H_1.

2. bez założeń na temat rozkładu:

Zobaczmy jednak, co by się stało, gdybyśmy nie przyjęli założenia o rozkładzie normalnym. Ponieważ mielibyśmy do czynienia z próbami sparowanymi o nieznanym rozkładzie, należałoby skorzystać z testu Wilcoxona. Warto jednak zauważyć, że w przeciwieństwie do testu t-studenta bada on mediany zamiast średnich, więc zmieniamy w tym momencie trochę hipotezy z zadania.

Na początku zignorujemy próbki o $r_i = 0$, uporządkujemy je rosnąco po r_i^2 oraz nadamy im nowe indeksy.

i	x_{i1}	x_{i2}	r_i	r_i^2
1	27	28	-1	1
2	30	29	1	1
3	26	28	-2	4
4	22	24	-2	4
5	26	24	2	4
6	25	27	-2	4
7	27	30	-3	9
8	26	29	-3	9
9	28	32	-4	16

Po zignorowaniu zerowych r_i pozostało nam $n_r = 9$ próbek. Następnie nadamy im rangi R_i zgodne z ich nowym porządkiem (dla identycznych wartości przyporządkujemy średnią z odpowiadających im indeksów) oraz wyliczymy (r_i).

R_i	i	x_{i1}	x_{i2}	r_i	r_i^2
1.5	1	27	28	-1	1
1.5	2	30	29	1	1
4.5	3	26	28	-2	4
4.5	4	22	24	-2	4
4.5	5	26	24	2	4
4.5	6	25	27	-2	4
7.5	7	27	30	-3	9
7.5	8	26	29	-3	9
9	9	28	32	-4	16

Mamy zatem już wszystkie dane potrzebne do wyliczenia statystyki $W = \sum_{i=1}^{n_r}((r_i) \cdot R_i)$.

R_i	i	x_{i1}	x_{i2}	r_i	r_i^2	(r_i)	$(r_i) \cdot R_i$
1.5	1	27	28	-1	1	-1	-1.5
1.5	2	30	29	1	1	1	1.5
4.5	3	26	28	-2	4	-1	-4.5
4.5	4	22	24	-2	4	-1	-4.5
4.5	5	26	24	2	4	1	4.5
4.5	6	25	27	-2	4	-1	-4.5
7.5	7	27	30	-3	9	-1	-7.5
7.5	8	26	29	-3	9	-1	-7.5
9	9	28	32	-4	16	-1	-9

Zatem $W = -32$. Ponieważ W ma rozkład asymtotycznie normalny o paramterach: $\mu = 0$ i $\sigma = \sqrt{\frac{n_r(n_r+1)(2n_r+1)}{6}}$, więc:

$$z = \frac{W - \mu}{\sigma} = \frac{W\sqrt{6}}{\sqrt{n_r(n_r+1)(2n_r+1)}} = \frac{-32\sqrt{6}}{\sqrt{9 \cdot 10 \cdot 19}} = -\frac{32}{\sqrt{285}} \approx -1.90$$

Dla $\alpha = 0.05$ przedział nieodrzucenia hipotezy zerowej wynosi $[-1.96, 1.96]$, a zatem nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Jak widzimy, konkluzja jest inna niż w przypadku testu t-studenta.

Zadanie 10:
Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu $\mathrm{Norm}(\mu, \sigma^2)$ ze znaną wariancją. Skonstruuj test najmocniejszy dla hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ przeciw alternatywie $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$ na poziomie istotności 0.05. Oblicz moc uzyskanego testu. Jaka powinna być długość próby, aby moc testu była większa od 0.95?

Rozwiązanie: Jako że statystyka $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ma rozkład $\mathrm{Norm}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, to możemy skorzystać z lematu Neymanna-Pearsona dla hipotez prostych H_0, H_1 - takich, że $\bar{X}$ pochodzi odpowiednio z rozkładów $\mathrm{Norm}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$ i $\mathrm{Norm}(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n})$. Podstawiając do wzoru z lematu postaci odpowiednich gęstości łatwo sprawdzić, że obszar krytyczny najmocniejszego testu będzie miał postać $W = \{t \in \mathbb{R} : t \geq K\}$ dla pewnej stałej K, która zależy od żądanego poziomu istotności. W naszym przypadku poziom ten wynosi 0.05, mamy zatem

$$0.05 = \Pr(\bar{X} \geq K | H_0) = 1 - \Phi\left(\frac{K - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right),$$

gdzie Φ oznacza dystrybuantę rozkładu normalnego. Z powyższego wzoru, po prostych przekształceniach, wyliczamy K

$$K = \Phi^{-1}(0.95) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0.$$

Obszar krytyczny dla tak skonstruowanego testu ma więc postać

$$W = \{t \in \mathbb{R} : t \geq \Phi^{-1}(0.95) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \mu_0\}.$$

Bezpośrednio obliczamy moc testu

$$1 - \beta = \Pr(\bar{X} \geq K | H_1) = 1 - \Phi\left(\frac{K - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - \Phi\left(\Phi^{-1}(0.95) - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right).$$

Sprawdzamy kiedy $1-\beta > 0.95$, podstawiając pod $\Phi^{-1}(0.95)$ wartość 1.645

$$1-\beta > 0.95 \iff \Phi^{-1}(0.05) > 1.645 - \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

Podstawiając teraz pod $\Phi^{-1}(0.05)$ wartość -1.645 otrzymujemy po przekształceniach

$$n > \left(\frac{3.29 \cdot \sigma}{\mu_1 - \mu_0}\right)^2.$$

Zadanie 11:
W 100 laboratoriach przeprowadzono niezależnie taki sam test na poziomie istotności 0.05. Zakładając, że hipoteza zerowa jest prawdziwa, oblicz prawdopodobieństwo, że w przynajmniej jednym z laboratotoriów została ona odrzucona.

Rozwiązanie: Prawdopodobieństwo odrzucenia wynosi 0.05 i mamy niezależne eksperymenty, czyli nasz wynik to $1 - 0.95^{100} \approx 0.994$.

Zadanie 12:
Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą prostą z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma)$ oraz niech $\overline{X}$ będzie średnią empiryczną oraz $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$. Pokaż, że $\overline{X}$ i S_n^2 są niezależne oraz że S_n^2 ma rozkład $\chi^2(n-1)$.

Rozwiązanie: Zacznijmy od pierwszej części. $X_1, ..., X_n$ są iid o rozkładzie $N(\mu, \sigma)$, stąd wektor $(X_1, ..., X_n)$ jest gaussowski. Dodajmy 0 na ostatniej współrzędnej $(X_1, ..., X_n, 0)$ nie zmienia to niezależności, dodatkowo wektor który otrzymaliśmy nadal jest gaussowski. Teraz przekształćmy nasz wektor liniowo:

$$(X_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i), ..., X_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i), \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i)) = (X_1 - \overline{X}, ..., X_n - \overline{X}, \overline{X}).$$

Otrzymany wektor nadal jest wektorem gaussowskim (bo przekształcenie było liniowe). Zatem aby sprawdzić niezależność ostatniej współrzędnej od pozostałych wystarczy policzyć kowariancję :

$$COV(X_j - \overline{X}, \overline{X}) = COV(X_j, \overline{X}) - COV(\overline{X}, \overline{X}) = COV(X_j, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i)) - VAR(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i)) =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n COV(X_i, X_j) - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n VAR(X_i) =$$

Z niezależności X_i i faktu, że $VAR(X_i) = \sigma^2$ otrzymujemy:

$$= \frac{1}{n} VAR(X_j) - \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 = 0.$$

Stąd dla każdego i należącego do $\{1, .., n\}$ $X_i - \overline{X}$ oraz $\overline{X}$ niezależne. Zatem $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ jako funkcja kwadratowa (ciągła) od $X_i - \overline{X}$ jest niezależna od $\overline{X}$.
Teraz pokażę, że S_n^2 ma rozkład $\chi^2(n-1)$. Do udowodnienia tego faktu będą potrzebne dwa inne fakty, które teraz udowodnię.

Fakt I : Jeżeli Z ma rozkład $N(0,1)$ to Z^2 ma rozkład $\chi^2(1)$
D-d: Liczymy funkcję charakterystyczną Z^2 :

$$\varphi_{Z^2}(t) = \mathbb{E}(e^{itZ^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx^2 - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{1-2it}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2 \cdot \frac{1}{1-2it}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-2it}}} dx =$$

co całkuje się do 1 jako gęstość p-stwa zmiennej o rozkładzie $N(0, \frac{1}{1-2it})$, zatem otrzymujemy :

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2it}}$$

czyli z jednoznaczności funkcji charakterystycznych Z^2 ma rozkład $\chi^2(1)$ c.k.d.

Fakt II : Jeżeli $X_1, ..., X_n$ są iid i mają rozkład $\chi^2(1)$ to $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\chi^2(n)$
D-d: Ponownie korzystam z własności funkcji charakterystycznych, $X_1, ..., X_n$ niezależne o rozkładzie $\chi^2(1)$:

$$\varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \varphi_{X_1}(t) \cdot \varphi_{X_2}(t) \cdot ... \cdot \varphi_{X_n}(t) = \frac{1}{1-2it} \cdot ... \cdot \frac{1}{1-2it} = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}$$

ponownie z jednoznaczności funkcji charakterystycznych $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\chi^2(n)$ c.k.d.

Mogę teraz przejść do udowadniania że S_n^2 ma rozkład $\chi^2(n-1)$: Zauważmy, że

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i \cdot \overline{X} + \sum_{i=1}^n (\overline{X})^2 = \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2n\overline{X}^2 + n\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - n\overline{X}^2$$

Stąd $\sum_{i=1}^n (X_i)^2 = S_n^2 + n\overline{X}^2$

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2\sum_{i=1}^n X_i \cdot \mu + \sum_{i=1}^n (\mu^2) = \sum_{i=1}^n (X_i)^2 - 2n\mu\overline{X} + n\mu^2 =$$

podstawiamy: $\sum_{i=1}^n (X_i)^2 = S_n^2 + n\overline{X}^2$

$$= S_n^2 + n\overline{X}^2 - 2n\mu\overline{X} + n\mu^2 = S_n^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

Otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = S_n^2 + n(\overline{X} - \mu)^2$$

Dzielimy stronami przez σ^2:

$$\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2 = \frac{S_n^2}{\sigma^2} + (\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$$

I zauważamy, że $\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$ na mocy Faktu II ma rozkład $\chi^2(n)$, bo $(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$ na mocy Faktu I ma rozkład $\chi^2(1)$ oraz $(\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2$ dla i należącego do $\{1, ..., n\}$ niezależne o takim samym rozkładzie. Natomiast $(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$ na mocy Faktu I ma rozkład $\chi^2(1)$, ponieważ $\overline{X}$ ma rozkład $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ stąd $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ ma rozkład $N(0,1)$ i $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ niezależne czyli spełnia spełnia założenia.
Z niezależności $\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ i $(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2$ otrzymujemy:

$$\varphi_{\frac{S_n^2}{\sigma^2}}(t) = \frac{\varphi_{\sum_{i=1}^n (\frac{X_i - \mu}{\sigma})^2}(t)}{\varphi_{(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}})^2}(t)} = \frac{(1-2it)^{-\frac{n}{2}}}{(1-2it)^{-\frac{1}{2}}} = (1-2it)^{-\frac{n-1}{2}}$$

Czyli $\frac{S_n^2}{\sigma^2}$ ma rozkład $\chi^2(n-1)$.

Zadanie 13:
Wiadomo, że jeśli X ma rozkład $N(0,1)$ oraz Z jest niezależne od X o rozkładzie $\chi^2(k)$ to zmiennalosowa $T = \frac{X}{\sqrt{Z/k}}$ ma rozkład t–studenta o k stopniach swobody. Korzystając z powyższego faktu pokaż, że dla próby prostej $X_1, ..., X_n$ z $N(\mu, \sigma^2)$ $\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\mu}{S_n}$ ma rozkład t-studenta o $n-1$ stopniach swobody

Rozwiązanie: Niech $X_i = Z_i \cdot \sigma + \mu$, gdzie $Z_i \sim N(0,1)$.

Wiemy, że $S_n = \sqrt{\sum_i (X_i - \bar{X})^2}$ oraz $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$. Podstawmy:

$$\begin{aligned}
\sqrt{n-1}\frac{\bar{X}-\mu}{S_n} &= \sqrt{n-1}\frac{\frac{1}{n}\sum_i (Z_i\sigma + \mu) - \mu}{\sqrt{\sum_i (Z_i\sigma + \mu - \frac{1}{n}\sum_j (Z_j\sigma + \mu))^2}} \\
&= \sqrt{n-1}\frac{\frac{\sigma}{n}\sum_i Z_i + \mu - \mu}{\sqrt{\sum_i (Z_i\sigma + \mu - \mu - \frac{\sigma}{n}\sum_j Z_j)^2}} \\
&= \sqrt{n-1}\frac{\frac{\sigma}{n}\sum_i Z_i}{\sqrt{\sigma^2 \sum_i (Z_i - \frac{1}{n}\sum_j Z_j)^2}} \\
&= \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\sum_i (Z_i - \bar{Z})^2/(n-1)}}
\end{aligned}$$

Pamiętając, że Z_i pochodzą z rozkładu standardowego normalnego, z zadania 12 wiemy, że $\sum_i (Z_i - \bar{Z})^2$ ma rozkład $\chi^2(n-1)$ oraz, że $\sum_i (Z_i - \bar{Z})^2$ i $\bar{Z}$ są niezależne.

Z własności rozkładu normalnego: $Y_1 + Y_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, dla $Y_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2, Y_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2$. Łatwo pokazać, że $\bar{Z} \sim N(0,1)$.

Zatem na mocy lematu z treści zadania T ma rozkład t-studenta o $n-1$ stopniach swobody.

Zadanie 14:
Każda ze sprzedanych suszarek do włosów pewnego typu z nieznanym prawdopodobieństwem θ zostanie już pierwszego dnia po zakupie zareklamowana przez kupującego z powodu ukrytej wady. Przypuszcza się, że prawdopodobieństwo zgłoszenia reklamacji później, niż pierwszego dnia po zakupie jest takie samo. Zweryfikuj tą hipotezę za pomocą testu χ^2 na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ na podstawie danych dotyczących 1000 suszarek, z których 40 reklamowano pierwszego dnia, 60 reklamowano później, a pozstałe nie były reklamowane.

Rozwiązanie: Rozwiążemy zadanie przy użyciu testu zgodności χ^2 Pearsona. MLE w tym wypadku musi być po prostu średnią, czyli $\theta = \frac{50}{1000} = 0.05$. Wtedy wartość statystyki wynosi

$$\chi^2 = \frac{(n_0 - np_0)^2}{np_0} + \frac{(n_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n_2 - np_2)^2}{np_2},$$

gdzie $n = 1000, p_0 = p_1 = \theta = 0.05, p_2 = 1 - 2\theta = 0.9, n_0 = 60, n_1 = 40, n_2 = 900$. Czyli

$$\chi^2 = \frac{(60-50)^2}{50} + \frac{(40-50)^2}{50} + \frac{(900-900)^2}{900} = 4.$$

Ze wskazówki wiemy, że kwantyl rozkładu $\chi^2(0.95, 1) = 3.84 < 4$, zatem możemy odrzucić hipotezę, że prawdopodobieństwo zgłoszenia reklamacji później niż pierwszego dnia po zakupie jest takie samo.

Zadanie 15: Skrypt W. Niemiro, zadanie 6 strona 109
Porównywano średnie ceny 1 kg truskawek w dwu różnych miastach. W każdym z miast zebrano

informacje z 6 losowo wybranych punktów sprzedaży. Po dokonaniu obliczeń otrzymano następujące wartości średnich cen i wariancji w obu miastach:

	średnia $\overline{x}$	estymator wariancji s^2
Miasto I	2.5	0.25
Miasto II	3.1	0.29

Estymatory wariancji s^2 są wyznaczone (dla każdej z dwóch próbek z osobna) według wzoru $s^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2/(n-1)$, gdzie n jest rozmiarem próbki. Zakładamy, że obserwowane zmienne losowe są niezależne i mają rozkłady normalne o tej samej wariancji.

(a) Przeprowadzić test dla weryfikacji hipotezy zerowej H_0 mówiącej, że przeciętne ceny są jednakowe w obu miastach, przy alternatywie H_1 mówiącej, że w mieście II przeciętna cena 1 kg truskawek jest wyższa. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0.05$.

(b) Przeprowadzić test dla weryfikacji hipotezy zerowej H_0 mówiącej, że przeciętne ceny są jednakowe w obu miastach, przy alternatywie H_2 mówiącej, że przeciętne ceny są różne. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0.05$.

Rozwiązanie:

Rozpatrujemy dwie próby z populacji o rozkładach normalnych $N(\mu_1, \sigma)$ i $N(\mu_2, \sigma)$. Hipotezą zerową H_0 jest $\mu_1 = \mu_2$. W takiej sytuacji test istotności to

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

gdzie $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ to średnie z prób, s_1, s_2 to odchylenia standardowe z prób, a n_1, n_2 to liczebności prób. Rozkład statystyki testowej t jest rozkładem t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody.

Podstawiając $\overline{x_1} = 2.5, \overline{x_2} = 3.1, s_1^2 = 0.25, s_2^2 = 0.29, n_1 = n_2 = 6$, dostajemy $t = -2$. Niech $q(p)$ będzie kwantylem rzędu p rozkładu t-Studenta o 10 stopniach swobody.

(a) Hipoteza H_1 to $\mu_1 < \mu_2$. Obszar krytyczny w tym przypadku to $W = (-\infty, -q(0.95)]$. Ponieważ $q(0.95) \approx 1.812461 < 2$, to odrzucamy hipotezę H_0 i przyjmujemy hipotezę alternatywną, która mówi, że w mieście II przeciętna cena truskawek jest wyższa.

(b) Hipoteza H_2 to $\mu_1 \neq \mu_2$. Obszar krytyczny w tym przypadku to $W = (-\infty, -q(0.975)] \cup [q(0.975), \infty)$. Ponieważ $q(0.975) \approx 2.228139 > 2$, to nie możemy odrzucić hipotezy zerowej.