9 Metoda sympleks

Test optymalności i koszty zredukowane Rozważamy zadanie typu $Max\, x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0 \mid Ax = b$ opisane tablicą sympleks. Oznacza to, że w górnym wierszu TS mamy kolejno liczby $1, -c_1, -c_2, ..., -c_n \,|\, b_0$. Jeżeli wszystkie współczynniki c_i odpowiadające zmiennym bazowym są równe 0 (a tak jest w tablicy sympleks) to współczynniki $-c_i$ nazywamy kosztami zredukowanymi.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest < 0 ($c_j > 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest poprawiająca. Ponieważ wędrując tą krawędzią zmieniamy tylko zmienne bazowe nie mające wpływu na funkcję celu i zwiększamy liczbę $c_j x - j$.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest $= 0$ ($c_j = 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest neutralna.

Jeżeli koszt zredukowany $-c_i$ odpowiadający zmiennej niebazowej x_j jest > 0 ($c_j < 0$) to krawędź wyznaczona przez zmienną x_j jest pogarszająca. Ponieważ wędrując tą krawędzią zmieniamy tylko zmienne bazowe nie mające wpływu na funkcję celu i zmniejszamy liczbę $c_j x - j$.

Twierdzenie 9.1 *Jeżeli w tablicy sympleks opisującej zadanie $Max\, x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0 \mid Ax = b$ wszystkie koszty zredukowane są ≥ 0 to tablica ta opisuje wierzchołek optymalny zadania zaś w prawym górnym rogu tablicy otrzymujemy optymalną wartość funkcji celu.*

Jeżeli ponadto wszystkie koszty zredukowane odpowiadające zmiennym niebazowym są > 0 to tablica ta opisuje jedyny wierzchołek optymalny zadania.

Dowód:

Jeżeli w tablicy sympleks wszystkie koszty zredukowane są ≥ 0 to funkcja celu $x_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + b_0$ może być zapisana tylko przy pomocy zmiennych niebazowych $x_0 = \sum_{x_i \ niebazowe} c_i x_i + b_0$ gdyż dla zmiennych bazowych $c_i = 0$. Funkcja celux_0 przyjmuje w wierzchołku opisanym tablicą sympleks wartość b_0 a dla pozostałych punktów wielościanu $x_0 \leq b_0$.

Przyjmijmy teraz, że wszystkie koszty zredukowane odpowiadające zmiennym niebazowym są > 0. Niech $q = (q_1, q_2, ..., q_n)$ będzie takim punktem wielościanu w którym funkcja celu przyjmuje wartość b_0. Otrzymujemy równanie $x_0 = b_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i q_i + b_0$. Stąd dla wszystkich zmiennych niebazowych $c_i > 0$, $q_i \geq 0$ i $\sum c_i q_i = 0$. Zatem wszystkie współrzędne q_i odpowiadające zmiennym niebazowym tablicy są $= 0$. Pozostałe współrzędne q_i jednoznacznie wyliczamy z tablicy i otrzymujemy wierzchołek opisany tablicą.

□

Wędrowanie między wierzchołkami, eliminacja Gaussa - Jordana.

W zadaniu PL mamy wierzchołek p opisany tablicą sympleks. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy

$$\left[\begin{array}{c|ccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & ... & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_{t+1} & ... & -c_i & ... & -c_n & b_0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{j,i} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,i} & \dots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Zakładamy, że krawędź odpowiadająca zmiennej x_i jest skończona i szukamy tablicy sympleks opisującej drugi koniec tej krawędzi.

Teraz wyliczamy minimum po wszystkich dodatnich $a_{j,i}$ z liczb $\frac{b_j}{a_{j,i}}$ czyli liczbę $Min_{j,\, a_{j,i}\geq 0}\, \frac{b_j}{a_{j,i}}$. Wybieramy dowolny współczynnik $a_{j,i}$, na którym osiągane jest minimum. Nazywamy go **elementem centralnym**. Na następnej tablicy zaznaczony będzie nawiasem.

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & -c_{t+1} & ... & -c_i & ... & -c_n & b_0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & a_{j,t+1} & \dots & (a_{j,i}) & \dots & a_{j,n} & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,i} & \dots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Teraz j - ty wiersz dzielimy przez $a_{j,i}$ zaś od każdego innego wiersza k odejmujemy poprawiony j-ty wiersz pomnożony przez $a_{k,i}$ - czyli zerujemy pozostałe miejsca k-tej kolumny. Otrzymujemy macierz:

$$\left[\begin{array}{c|ccccc|ccccc|c} x_0 & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ 1 & 0 & \dots & d_0 & \dots & 0 & -c^*_{t+1} & ... & 0 & ... & -c^*_n & b^*_0 \\ \hline 0 & 1 & \dots & d_1 & \dots & 0 & a_{1,t+1}* & ... & 0 & ... & a^*_{1,n} & b_1* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_j & \dots & 0 & a^*_{j,t+1} & \dots & 1 & \dots & a^*_{j,n} & b^*_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_t & \dots & 1 & a^*_{t,t+1} & \dots & 0 & \dots & a^*_{t,n} & b^*_t \end{array}\right],$$

gdzie $d_0 = \frac{c_i}{a_{j,i}}, d_1 = -\frac{a_{1,i}}{a_{j,i}}, ...,$
$d_{j-1} = -\frac{a_{j-1,i}}{a_{j,i}}, d_j = \frac{1}{a_{j,i}}, d_{j+1} = -\frac{a_{j+1,i}}{a_{j,i}}, ..., d_t = -\frac{a_{t,i}}{a_{j,i}}$

Otrzymaliśmy tablicę sympleks. Z bazy wypadła zmienna x_j a doszła zmienna x_i.

Algorytm prosty metody sympleks.

Rozważamy zadanie typu $Max\, x_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i + b_0 \mid Ax = b$

0) Start: Dana tablica sympleks pierwotnie dopuszczalna.

1) Test optymalności i wybór kolumny głównej.

a) Jeżeli wszystkie koszty zredukowane są nieujemne to STOP tablica opisuje wierzchołek optymalny.

b) Jeżeli nie to wybieramy kolumnę i, w której koszt zredukowany jest ujemny.

2) Test nieograniczoności i wybór elementu centralnego.

a) Jeżeli wszystkie elementy kolumny i są niedodatnie to STOP funkcja celu jest nieograniczona.

b) Jeżeli istnieją $a_{k,i} > 0$ to jako element centralny wybieramy taki $a_{j,i}$, że $\frac{b_j}{a_{j,i}} = Min\{\frac{b_k}{a_{k,i}} \ ; a_{k,i} \geq 0\}$.

3) Znajdujemy tablicę sympleks opisującą drugi koniec krawędzi metodą Gaussa - Jordana, GOTO 1).

Przykład 9.2 *Rozwiązujemy zadanie: Max* $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$ *, gdy:*
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 3$
$2x_1 + 5x_2 - 5x_3 \leq 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 \leq 8$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Postacią kanoniczną jest:
Max $x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$ *, gdy:*
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 + 5x_2 - 5x_3 + x_5 = 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_6 = 8$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

Wierzchołkowi $p_1 = (0,0,0,3,7,8)$ *odpowiada TS*

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & -2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (1) & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Idziemy krawędzią poprawiająca wyznaczoną przez x_1
Liczymy $Min\{\frac{3}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{8}{2}\} = 3$ *więc jako element centralny wybieramy 1.*
Po przekształceniach Gaussa - Jordana Otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & (1) & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Tablica ta opisuje wierzchołek $p_2 = (3,0,0,0,1,2,)$
Idziemy krawędzią poprawiająca wyznaczoną przez x_2
Liczymy $Min\{\frac{3}{2},\ \frac{1}{1},\ *\} = 1$ *więc jako element centralny wybieramy 1.*
Po przekształceniach Gaussa - Jordana Otrzymujemy

$$\left[\begin{array}{c|cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & 0 & 9 \\ \hline 0 & 1 & 5 & 0 & -5 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Kolumna odpowiadająca zmiennej x_4 *ma ujemny koszt zredukowany więc na krawędzi przez nią wyznaczonej*

$k = \{(6 + 5x_4, 0, 1 + 2x_4, x_4, 0, 3 + 4x_4) \mid x_4 \geq 0\}$ *funkcja celu* $x_0 = -x_2 + 4x_4 - 3x_5$ *rośnie w nieskończoność.*