8 Tablice sympleks

Opis wierzchołków i krawędzi zadania PL w postaci kanonicznej.

Niech $W = \{x \in R^n \mid Ax^T = b,\ x \geq 0\}$będzie wielościanem. Dodatkowo zakładamy, że równania opisujące W są liniowo niezależne -
czyli $rzA = t =$ liczba równań. Niech p będzie wierzchołkiem W. Punktowi p przyporządkowujemy n nierówności spełnionych jako równości. Pierwszych t pochodzących z układu równań:

$rzA = rz[A|b]$, bo punkt p jest rozwiązaniem.

Na mocy lematu Steinitza o bazie istnieją zmienne $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_{n-t}}$ takie, że po uzupełnieniu układu $Ax^T = b$ równaniami $x_{i_1} = 0, x_{i_2} = 0, ..., x_{i_{n-t}} = 0$ otrzymamy układ n liniowo niezależnych równań z n niewiadomymi, którego jedynym rozwiązaniem jest punkt p.

Zmienne $i_1, ..., i_{n-t}$ nazywamy niebazowymi zaś pozostałe bazowymi.

Współrzędne niebazowe wierzchołka p są równe 0.

Uwaga: Wierzchołek ma co najwyżej t niezerowych współrzędnych.

Dla ułatwienia przenumerujmy tak zmienne by $1, 2, ..., n - t$ były zmiennymi niebazowymi oraz $n - t + 1, ..., n$ zmiennymi bazowymi.

Wtedy macierz równania opisującego W składa się z 3 części $A = [N|B|b]$, gdzie $[B]$ jest macierzą kwadratową.

$rz[T] = n \Rightarrow rzB = t \Rightarrow B$ jest odwracalna.

Mnożąc układ równań $Ax^T = b$ z lewej strony przez macierz B^{-1} otrzymujemy równoważny opis wielościanu W

$$[B^{-1}N|I]\, x^T \ = \ B^{-1}b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$$

Zaś wierzchołek ma współrzędne $p = (0, ..., 0, b_1, b_2, ..., b_t)$.

Podsumowując, każdemu wierzchołkowi, przez wybór zmiennych bazowych przyporządkowujemy układ równań o macierzy zawierającej podmacierz jednostkową.

Definicja 8.1 ***Tablicą Sympleks*** *nazywamy taką macierz rozszerzoną układu równań $[A|b]$, że A zawiera podmacierz jednostkową. Dokładniej, można z macierzy A tak powykreślać kolumny i poprzestawiać wiersze by uzyskać macierz jednostkową.*

Tablicę sympleks nazywamy pierwotnie dopuszczalną gdy wszystkie wyrazy wolne są ≥ 0. Co zapisujemy $b \geq 0$.

Jak pokazaliśmy poprzednio każdemu wierzchołkowi odpowiada co najmniej jedna Tablica Sympleks pierwotnie dopuszczalna. Dokładniej tyle tablic ile jest możliwości wyboru zmiennych (nie)bazowych.

Stwierdzenie 8.2 *Pierwotnie dopuszczalne tablice sympleks opisują wierzchołki.*

Dowód:
Niech $[A|b]$ będzie tablicą sympleks pierwotnie dopuszczalną. W macierzy wybieramy kolumny tworzące macierz jednostkową. Zmienne odpowiadające tym kolumną nazwiemy bazowymi zaś pozostałe niebazowymi. Zmiennym niebazowym przypisujemy wartość 0. Bazowe zmienne wyliczamy z układu równań po opuszczeniu zmiennych niebazowych. Tak więc zmienne bazowe przyjmują wartości wyrazów wolnych w odpowiedniej kolejności. Otrzymany punkt jest wierzchołkiem gdyż spełnia n nierówności jako równania. t z równań $Ax = b$ i $n - t$ z równań $x_i = 0$ spełnianych przez zmienne niebazowe. Dodatkowo równania te są liniowo niezależne.

□

Przykład 8.3 *W Tablicy Sympleks* $\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & ww \\ \hline 0 & 1 & 5 & 0 & -5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -4 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ *możemy wybrać kolumny 1, 2 i 7. Niebazowymi zmiennymi są* x_3, x_4, x_4, x_6 *i one przyjmują wartość 0. Wykreślamy kolumny zmiennych niebazowych i zmienne bazowe wyliczamy z równania o macierzy* $\left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_7 & ww \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$. *Więc* $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ *i* $x_7 = 3$. *A wierzchołkiem jest* $p_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 3)$.
Wybierzmy teraz kolumny 2, 4 i 7. Otrzymamy wierzchołek $p_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 3)$.

Algorytm szukania wierzchołków

Niech $W = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\}$będzie wielościanem. Dodatkowo zakładamy, że równania opisujące W są liniowo niezależne - czyli $rzA = t =$ liczba równań.

Wybieramy maksymalne kwadratowe podmacierze B macierzy A. Jeżeli B jest macierzą odwracalną to mnożymy równanie $Ax = b$ przez B^{-1} z lewej strony i otrzymujemy tablice sympleks. Jeżeli otrzymana tablica jest pierwotnie dopuszczalna to opisuje wierzchołek.

Algorytm opisu krawędzi

Niech $[A|b]$ będzie tablicą sympleks pierwotnie dopuszczalną opisującą wierzchołek p. Szukamy krawędzi wychodzących z tego wierzchołka. Zaczynamy od wybrania $n-1$ równań z tych opisujących wierzchołek. Nie możemy odrzucać równań z układu $Ax = b$ zatem dla pewnej zmiennej niebazowej zamiast $x_i = 0$ przyjmujemy $x_i \geq 0$. Otrzymujemy opis prostej w której zmienna x_i jest parametrem. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy

$$A = [A|b] = \left[\begin{array}{ccc|ccccc|c} x_1 & ... & x_t & x_{t+1} & ... & x_i & ... & x_n & ww \\ \hline 1 & \dots & 0 & a_{1,t+1} & ... & a_{1,i} & ... & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & a_{j,i} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{t,t+1} & \dots & a_{t,i} & \dots & a_{t,n} & b_t \end{array}\right]$$

Teraz wyliczamy zmienne bazowe $x_j = b_j - a_{j,i}x_i$, dla $1 \leq j \leq t$. Punkty otrzymanej prostej mają postać $(b_1 - a_{1,i}x_i,\ b_2 - a_{2,i}x_i,\ ...,\ b_t - a_{t,i}x_i,\ 0, 0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$, gdzie x_i stoi na i-tym miejscu. Jeżeli wszystkie $a_{j,i} \leq 0$ to jedynym ograniczeniem jest $x_i \geq 0$ i otrzymujemy krawędź nieskończoną. W przeciwnym przypadku największą wartością x_i będzie minimum po wszystkich dodatnich $a_{j,i}$ z liczb $\frac{b_j}{a_{j,i}}$ czyli liczba $Min\{\frac{b_j}{a_{j,i}}\ ;\ 0 \leq j \leq t,\ a_{j,i} \geq 0\}$.

Jeżeli minimum $= 0$ to krawędź ma długość 0 (jest punktem) i nazywamy ją zdegenerowaną.

Aby opisać wszystkie krawędzie wychodzące z wierzchołka p należy użyć wszystkich tablic sympleks opisujących p.

Przykład 8.4 *Opiszmy ostrosłup* $W \in \mathbf{R^3}$ *o podstawie kwadratowej z wierzchołkami* $p_1 = (0,0,0),\ p_2 = (1,0,0),\ p_3 = (0,1,0),\ p_4 = (1,1,0)$ *i o szczycie w punkcie* $p_5 = (0,0,2)$.

W jest opisane układem nierówności:
$2x_1 + x_3 \leq 2$
$2x_2 + x_3 \leq 2$
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

postać kanoniczna:
$2x_1 + x_3 + x_4 = 2$
$2x_2 + x_3 + x_5 = 2$
$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$
Zapiszmy w postaci tablicy sympleks:

$$TS_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ww \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Zmiennymi bazowymi są x_4 i x_5 zaś TS_1 opisuje wierzchołek:
$\overline{p_1} = (0,0,0,1,1)$,
Poruszamy się w kierunku wierzchołka $\overline{p_5}$ krawędzią wyznaczoną przez x_3:

$$TS_1 = \left[\begin{array}{ccccc|c} & & \downarrow & & & \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ww \\ \hline 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & (1) & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Szukamy elementu centralnego.
$Min\left\{\frac{2}{1}, \frac{2}{1}\right\} = 2$ zatem możemy wybrać dowolny element kolumny 3-ciej.

$$TS_2 = \left[\begin{array}{ccccc|c} k_1 & k_2 & & & k_3 & \\ \hline 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$ Zmiennymi bazowymi są teraz x_3 i x_4 zaś TS_2 opisuje wierzchołek $\overline{p_5} = (0,0,1,0,0)$

Ile krawędzi wychodzi z W?

Z rysunku widać, że 4. A TS_2 opisuje tylko trzy krawędzie o wektorach kierunkowych
$k_1 \rightarrow (1,0,0,-2,0)$ - krawędź zdegenerowana (długość 0) gdyż $Min\left\{\frac{0}{2}, *\right\} = 0$

$k_2 \to (0, 2, -1, 1, 0)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_3}$
$k_3 \to (0, 0, -1, 1, 1)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_1}$

TS opisuje $n - t$ krawędzi z których pewne mają długość 0 i nazywamy je zdegenerowanymi. Wędrując krawędzią zdegenerowaną nie zmieniamy wierzchołka, ale możemy znaleźć inną TS opisującą ten wierzchołek. (Jeżeli uwzględniamy wybór zmiennych bazowych to inny).

Idziemy krawędzią k_1:

Otrzymujemy $TS_3 = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & B & B & & \end{array}\right]$

Tablica TS_3 opisuje dalej wierzchołek $\overline{p_5}$ i krawędzie:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} & k_4 & & k_5 & k_6 & \\ \hline 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & & B & & & \end{array}\right]$$

$k_4 \to (1, 1, -1, 0, 0)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_4}$
$k_5 \to (-1, 0, 0, 1, 0)$ - zdegenerowana $k_6 = -k_1$
$k_6 \to (1, 0, -1, 0, 1)$ w kierunku wierzchołka $\overline{p_2}$

Definicja 8.5 ***Tablicą Sympleks*** *opisującą zadanie programowania liniowego* $Max\,\{\, x_0 = c \bullet x + b_0 \mid Ax = b, x \geq 0\}$ *nazywamy taką macierz, w której pierwszy wiersz reprezentuje równanie* $x_0 - c \bullet x = b_0$*, pozostałe wiersze równania* $[A|b]$ *i macierz ta zawiera podmacierz jednostkową. Zwyczajowo pierwszy wiersz - opisujący funkcję celu jest oddzielony linią poziomą. Podobnie znak równości przedstawiamy jako linię pionową.*

Przykład 8.6 *Tablicą sympleks dla zadania*

$Max\ x_0 = 2x_1 + 6x_2 - 3x_3$ *, gdy:*
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$
$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_5 = 7$
$2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_6 = 8$
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$ *jest*

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & WW \\ 1 & -2 & -6 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & -5 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & -7 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right]$$

Funkcję celu zastąpiliśmy równaniem $x_0 - 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0$ *zaś podmacierz jednostkowa powstaje z kolumn odpowiadających zmiennym o indeksach 0,4,5 i 6.*