1 Wprowadzenie

Rozpoczniemy od przedstawienia kilku charakterystycznych przykładów zadań optymalizacji liniowej.

Zagadnienie diety.

Jak wymieszać pszenicę, soję i mączkę rybna by uzyskać najtańszą mieszankę zapewniającą wystarczającą zawartość węglowodanów, białka i soli mineralnych dla kurcząt.

Zapotrzebowanie, zawartość składników i ceny przedstawia następująca tabela:

	węglowodany	białko	sole mineralne	cena
pszenica	$0,8$	$0,01$	$0,15$	300 zł/t
soja	$0,3$	$0,4$	$0,1$	500 zł/t
mączka	$0,1$	$0,7$	$0,2$	800 zł/t
zapotrzebowanie	$0,3$	$0,7$	$0,1$	

Rozpoczynamy od wyznaczenia zmiennych. Niech x_i oznacza wagę i-tego składnika w mieszance.

Funkcją celu jest $min\ x_0 = 300x_1 + 500x_2 + 800x_3$ - czyli koszt mieszanki.

Ograniczenia są dwojakiego typu

a) W mieszance musi być wystarczająco każdego ze składników:

$0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,1x_3 \geq 0,3$
$0,01x_1 + 0,4x_2 + 0,7x_3 \geq 0,7$
$0,15x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 \geq 0,1$

b) Waga używanych składników jest nieujemna.

$x_1 \geq 0 \qquad x_2 \geq 0 \qquad x_3 \geq 0$

Podsumowując. Szukamy najmniejszej wartości funkcji trzech zmiennych $x_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ograniczonej do podzbioru $\mathbb{R}^3$ zwanego **obszarem dopuszczalnym**.

Zadanie to nazywamy liniowym, bo funkcja celu x_0 zależy liniowo od zmiennych x_1, x_2, x_3 i obszar dopuszczalny opisany jest zbiorem nierówności liniowych.

Zagadnienie transportowe:

Mamy 3 hurtownie i 5 sklepów. Koszt transportu jednostki towaru z i - tej hurtowni do j - tego sklepu przedstawia tabela.

$Koszt$	$s1$	$s2$	$s3$	$s4$	$s5$	podaż
$h1$	8	12	15	13	21	10
$h2$	0	1	8	3	4	31
$h3$	5	8	7	8	6	20
popyt	10	10	20	10	11	

Jak zorganizować transport, żeby koszt był minimalny?

Wprowadźmy zmienne x_{ij} opisujące ilość towaru przewożonego z i - tej hurtowni do j - tego sklepu.

Niech a_{ij} oznacza koszt przewiezienia jednostki towaru przewożonego z i - tej hurtowni do j - tego sklepu.

Jako funkcję celu przyjmijmy: $min\ x_0 \ = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} a_{ij} x_{ij}$

Rozpatrzmy przypadek gdy zadanie jest zbilansowane, czyli gdy podaż = popyt.

Wtedy warunkami ograniczającymi są:

$\sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 10,\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 31,\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 20,$

$\sum_{i=1}^{3} x_{1i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{2i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{3i} = 20,$

$\sum_{i=1}^{3} x_{4i} = 10,\ \sum_{i=1}^{3} x_{5i} = 11$

Ponadto nie można przewozić ujemnej liczby towarów - a więc:

$\forall_{i,j}\ x_{ij} \geq 0$

Czasami towary są podzielne jak prąd czy woda, ale często dodajemy warunek, że zmienne są liczbami całkowitymi - czyli dodajemy warunki:

$\forall_{i,j}\ x_{ij} \in Z$

Dylemat stolarza

Stolarz ma zamówienie na 11 półek o kształcie jak na rysunku:

Ile desek o długości 220 cm potrzebuje na wykonanie zamówienia?

Na początku ustalamy sposoby cięcia desek:

i	$60\,cm$	$40\,cm$
1	3	1
2	2	2
3	1	4
4	0	5

Wprowadzamy zmienne: x_i - liczba desek ciętych i-tym sposobem.

Teraz matematyczny model zagadnienia wygląda następująco:

$min\ x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 11$
$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \geq 22$

$\forall_i \; x_i \geq 0, \; x_i \in Z$

Zadania tego typu występują często w realnym życiu gdyż huty dostarczają do fabryk pręty określonej długości, które trzeba oszczędnie pociąć lub taśmę, z której trzeba wykroić detale.

Jak widzimy w zadaniach optymalizacji liniowej opisujące obszar dopuszczalny są równaniami lub nierównościami liniowymi. Do pewnego stopnia te typy warunków są wymienne.

Równość $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ można zastąpić układem nierówności.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq b \\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \end{cases} \text{lub}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \geq b \\ \sum_{i=1}^{n} -a_i x_i & \geq -b \end{cases}$$

Podobnie nierówność $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$
można zastąpić układem:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$$

Podobnie warunki minimum i maksimum w funkcji celu można stosować wymiennie gdyż:
$min\{x_0 \;= f(x) \mid x \in S\} = max\{y_0 = -x_0 \;= -f(x) \mid x \in S\}$

2 Zbiory wypukłe i zbiory domknięte

Zagadnienie optymalizacji polega na znalezieniu minimum lub maksimum funkcji $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie X jest podzbiorem $\mathbb{R}^n$ zwanym obszarem dopuszczalnym. Od zbioru X wymagamy by był domknięty i wypukły.

Zaczniemy od opisania najważniejszych własności zbiorów wypukłych i domkniętych.

Definicja 2.1 *Podzbiór $A \subset R^n$ nazywamy domkniętym jeżeli granica każdego zbieżnego ciągu punktów z A należy do zbioru A. Lub równoważnie: Jeżeli punkt p nie należy do A to istnieje ε 0 taki, że kula o środku p i promieniu ε jest rozłączna z A. Symbolami zapisujemy to: $p \notin A \;\Rightarrow\; \exists_{\varepsilon>0} K(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$.*

Będziemy też używać znanego twierdzenia o zbiorach domkniętych.

Twierdzenie 2.2 *Część wspólna zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.*

Definicja 2.3 *Domknięciem zbioru $A \subset R^n$ nazywamy zbiór*
$\overline{A} = \bigcap\{B \mid A \subset B \wedge B \text{ domknięty}\}$
czyli najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.

Jedną z najważniejszych własności obszaru dopuszczalnego jest **wypukłość**.

Definicja 2.4 *Wypukłość*
Podzbiór $A \subset R^n$ jest wypukły jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera odcinek łączący je, czyli:
$\forall_{p,q \in A}\ \overline{pq} \subset A$

Odcinek $\overline{pq}$ możemy zapisać jako
$\overline{pq} = \{p + r\overrightarrow{pq} : r \in [0,1]\} = \{p + r(q-p) : r \in [0,1]\} =$
$= \{p + rq - rp : r \in [0,1]\} = \{(1-r)p + rq : r \in [0,1]\}$. Ostatni zapis czytamy: $\overline{pq}$ jest zbiorem kombinacji wypukłych punktów p i q.

Definicja 2.5 *Brzegiem zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy zbiór*
$\partial A = \{p \in \mathbb{R}^n \mid \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{q_1,q_2}\ q_1 \in K(p,\varepsilon) \cap A,\ q_2 \in K(p,\varepsilon) \setminus A\}.$

Twierdzenie 2.6 *Podzbiór $A \subset R^n$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy zawiera swój brzeg, czyli:*
$A = \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \partial A \subset A.$

Dowód:

$\Rightarrow$ Niech $p \notin A$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Stąd $p \notin \partial A$.
$\Leftarrow$ Niech $p \notin A$. Ponieważ $p \notin \partial A$ więc istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Stąd $A = \overline{A}$.

□

Definicja 2.7 *Półprzestrzenią w R^n nazywamy zbiór rozwiązań nietrywialnej nierówności liniowej, a zatem zbiór postaci:*
$H = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b\}$

Twierdzenie 2.8 *Brzegiem ∂H półprzestrzeni $H = \{(x_1, ...x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n \leq b\}$ jest hiperprzestrzeń*
$\partial H = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$

Dowód:
Niech $D = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ :\ a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b\}$ i $p \in D$. Ponieważ $D \subset H$ więc $\forall_{>0}\ p \in K(p,\varepsilon) \cap A$. Ponadto jeśli $p = (p_1, p_2...., p_n)$ i $a_j \neq 0$ to $\forall_{\varepsilon>0}\ p + (0, 0, ..., \frac{\varepsilon|a_j|}{2a_j}, 0, ..., 0) \in K(p,\varepsilon) \setminus A$. Zatem $D \subset \partial H$.

Niech teraz $p \notin D$. Wtedy odległość $\varrho(p, D) = \frac{|a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n - b|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}} > 0$ więc dla $0 < \varepsilon < \varrho(p, D)$, $K(p,\varepsilon) \cap A = \emptyset$ gdy $p \notin H$ i $K(p,\varepsilon) \subset A$ gdy $p \in H$. Stąd $\partial H \subset D$.

□

Twierdzenie 2.9 *Półprzestrzeń jest zbiorem wypukłym i domkniętym.*

Dowód:
Dowód domkniętości otrzymujemy jako wniosek z dwóch ostatnich twierdzeń.

Dowód wypukłości

Niech $p = (p_1, p_2, ...p_n)$ i $q = (q_1, q_2, ...q_n) \in H$
Niech $r \in [0, 1]$.
Pokażemy, że $rp + (1 - r)q \in H$

$\sum_{i=1}^{n} a_i\ p_i \leq b \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{s} a_i\ (rp_i) \leq rb$
$\sum_{i=1}^{n} a_i\ q_i \leq\ b \quad \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i((1 - r)q_i) \leq (1 - r)b$
$\sum_{i=1}^{n} a_i\ [rp_i + (1 - r)q_i] \leq b \Rightarrow rp + (1 - r)q \in H$

□

Twierdzenie 2.10 *Część wspólna zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym*
.

Dowód:
Niech $A = \cap_i A_i$ będzie przecięciem zbiorów wypukłych. Weźmy dwa punkty p i q ze zbioru A. Wówczas $\forall_i\, p \in A_i$ oraz $q \in A_i$ z wypukłości wynika, że odcinek $\overline{pq} \subset A_i$ i wobec dowolności *i* $\overline{pq} \subset A$

□

Przedstawimy teraz szereg faktów o rozdzielaniu zbiorów domkniętych.

Lemat 2.11 *Niech A będzie zbiorem wypukłym i domkniętym i $p \in R^n \backslash A$.*
Wtedy istnieje dokładnie jeden punkt $q \in A$ taki że odległość $\varrho(p, q) = \varrho(p, A) = \underset{q \in A}{inf}\ \varrho(p, q)$

Dowód:

Weźmy dowolny punkt $x \in A$. Rozpatrujemy $A \cap K\ (p,\ \ \varrho(p, x)) = A'$. $\varrho(p, A) = \varrho(p, A')$ - bez zmniejszenia ogólności możemy przyjąć , że A jest zwarty.
Niech q_1, q_2,... będzie takim ciągiem punktów $\in A$ że $\underset{i \to \infty}{lim} \varrho(p, q_i) = \varrho(p, A)$.
Jeśli A jest zwarty to z q_n możemy wybrać podciąg q_{i_1}, q_{i_2}, ... zbieżny do pewnego q. $\varrho(p, q) = \underset{i \to \infty}{lim} \varrho(p, q_{i_j}) = \varrho(p, A)$.

□

Twierdzenie 2.12 *Jeśli W jest zbiorem wypukłym i domkniętym zaś $p \notin W$ to istnieje półprzestrzeń H, taka że $W \subset H$ i $p \notin H$*

Dowód:

Niech $q \in W$ będzie takim punktem, że $\varrho(p, W) = \varrho(p, q)$. Przyjmijmy $H = \{x \in R^n : \ x \bullet (q-p) \ \leq \frac{1}{2}(q \bullet q) - \frac{1}{2}(p \bullet p)\}$. H jest półpłaszczyzną zawierającą W a jej brzeg $\partial H = \{x \in R^n : \ x \bullet (q-p) = \frac{1}{2}(q \bullet q) - \frac{1}{2}(p \bullet p)\}$, jak łatwo policzyć, jest symetralną odcinka $\overline{pq}$.

Przypuśćmy teraz, że istnieje punkt $q_1 \in A \setminus H$. Wtedy na odcinku $\overline{q_1 q}$ istnieje punkt $q_2 \in \partial H$. Trójkąt p, q, q_1 jest równoramienny a jego najkrótszym bokiem jest $\overline{pq}$. Zatem wysokość opuszczona z wierzchołka p ma spodek q_3 na boku $\overline{q_1 q}$. Otrzymaliśmy sprzeczność bo $q_3 inA$ oraz $\varrho(p, q_3) < \varrho(p, q)$.

Niech $q' \in A$ będzie taki, że $\varrho(p, q') = \varrho(p, q) = \varrho(p, A)$

Jeśli $q' \neq q$ to $\varrho(p, \frac{q+q'}{2}) < \varrho(p, A)$ oraz $\frac{q+q'}{2} \in A$, bo A jest wypukły.

$\square$

Twierdzenie 2.13 *Każdy zbiór wypukły i domknięty w R^n jest częścią wspólną półprzestrzeni.*

3 Przestrzenie afiniczne

Zbiorowi ciągów n elementowych o współczynnikach rzeczywistych $\mathbb{R}^n$ można nadać strukturę przestrzeni liniowej wprowadzając dodawanie ciągów (wektorów) i mnożenie przez liczby. Można też nadać strukturę przestrzeni afinicznej wprowadzając następujące działanie zwane środkiem ciężkości.

Definicja 3.1 *Niech $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_t$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $\sum_{i=1}^{t} \ r_i \ = 1$. Wówczas $p = \sum_{i=1}^{t} \ r_i p_i$ nazywamy środkiem ciężkości punktów p_i o wagach r_i.*

Branie środka ciężkości ma następujące własności:

1) $1p = p$

2) $\sum_{i=1}^{t} \ r_i p_i = \sum_{i=1}^{t} \ r_i p_i + 0q$

3) Jeżeli $p_j = \sum_{i=1}^{t} \ r_{i,j} q_i$ i $a = \sum_{j=1}^{k} \ s_j p_j$ to $a = \sum_{j=1}^{k} \ s_j \sum_{i=1}^{t} \ r_{i,j} q_i \ = \sum_{i=1}^{t} \ \left(\sum_{j=1}^{k} \ s_j r_{i,j} \right) \ q_i$.

Definicja 3.2 *Podprzestrzenią afiniczną nazywamy podzbiór $\mathbb{R}^n$ zamknięty na branie środków ciężkości.*

Twierdzenie 3.3 *Niech W będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^n$. Wówczas równoważne są warunki:*

1) W jest przestrzenią afiniczną.

2) W jest postaci $W = p + V$, gdzie $p \in W$ i V jest przestrzenią liniową.

3) W jest przestrzenią zbiorem rozwiązań pewnego układu równań liniowych.

Definicja 3.4 *Układem bazowym przestrzeni afinicznej* $W = p+V$ *nazywamy ciąg* $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$*, gdzie ciąg* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *jest bazą przestrzeni liniowej* V.

Każda baza punktowa wyznacza izomorfizm afiniczny przestrzeni W na $\mathbb{R}^n$ zadany wzorem: $\varphi(p + \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i) = (a_1, a_2, ..., a_n)$

Definicja 3.5 *Niech* T *będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej* R^n. *Symbolem* $af(T)$ *oznaczać będziemy podprzestrzeń afiniczną rozpiętą przez* T*, czyli zbiór wszystkich środków ciężkości punktów z* T.

To znaczy. Jeżeli $p_0 \in T$ *to* $af(T) = p_0 + lin\{\overrightarrow{p_0, p}\ ;\ p \in T\} = \left\{p_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i\overrightarrow{p_0, p_i}\ ;\ p \in T\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{k} a_ip_i\ ;\ p \in T, a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right\}$*, gdzie ciąg* $a_0, a_1, ..., a_k$ *jest układem wag.*

Definicja 3.6 *Wymiarem zbioru* T *nazywamy wymiar* $af(T)$.

Definicja 3.7 *Niech* T *będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznej* R^n. *Symbolem* $Conv(T)$ *zbiór wszystkich środków ciężkości punktów z* T *o wagach nieujemnych.*

To znaczy. Jeżeli $p_0 \in T$ *to* $af(T) = p_0 + lin\{\overrightarrow{p_0, p}\ ;\ p \in T\} = \left\{p_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i\overrightarrow{p_0, p_i}\ ;\ p \in T\right\} = \left\{\sum_{i=0}^{k} a_ip_i\ ;\ p \in T, a_0 = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i\right\}$*, gdzie ciąg* $a_0, a_1, ..., a_k$ *jest układem wag.*

Twierdzenie 3.8 $Conv(T)$ *jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym* T.

Dowód:

1) Wypukłość.

Niech $p = \sum_{i=0}^{k} a_i\ p_i$ oraz $q = \sum_{i=0}^{k} b_i\ p_i$ będą dwoma punktami z $Conv\ T$. Zatem $p_i \in T$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1 = \sum_{i=0}^{k} b_i$ oraz $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$. Dowolny punkt odcinka $[p, q]$ jest postaci $(1-t)p + tq$, gdzie $t \in [0, 1]$. Teraz $(1-t)p + tq = (1-t)\sum_{i=0}^{k} a_i\ p_i + t\sum_{i=0}^{k} b_i\ p_i = \sum_{i=0}^{k}((1-t)a_i + tb_i)\, p_i \in Conv(T)$ gdyż $\sum_{i=0}^{k}((1-t)a_i + tb_i) = 1$ i współczynniki są nieujemne.

2) Minimalność.

Niech X będzie zbiorem wypukłym zawierającym T. Pokażemy przez indukcję względem długości zapisu kombinacji wypukłej, że każdy punkt z $Conv(T)$ należy do X. Niech $p = \sum_{i=0}^{k} a_i\ p_i \in Conv\ T$, gdzie $p_i \in T$, $\sum_{i=0}^{k} a_i = 1$ oraz $a_i \geq 0$.

1^0 $k = 0$. Wtedy $p = p_1 \in T \subset X$.

2^0 Krok indukcyjny. Zakładamy, że $k > 0$ i każda kombinacja wypukła długości $< k$ należy do X.

□

Definicja 3.9 *Hiperpłaszczyzną V podpierającą zbiór wypukły W w punkcie p nazywamy taką hiperpłaszczyznę V, że $dimV = n-1$, $p \in V$, W leży po jednej stronie V to znaczy istnieje taka półprzestrzeń H zawierająca W, że $V = \partial H$ jest brzegiem i $p \in \partial H$. Inaczej mówiąc V jest opisana równaniem*

$V = \{x : \ \alpha \bullet x = b\}$,

gdzie $\alpha \in R^n$ i $b \in R$ są takie, że $\forall_{x \in W} \ \alpha \bullet x = b \le b$.

Twierdzenie 3.10 *Jeżeli W jest zbiorem wypukłym i domkniętym i $p \in \partial W$ (p należy do brzegu W) to istnieje hiperpłaszczyzną podpierającą zbiór W w punkcie p.*

Dowód:

Niech $p \in \partial W$

Istnieje zatem ciąg punktów $p_1, p_2, ... \notin W$ taki że $\varrho(p_i, p) < \frac{1}{i}$.

Z każdym z tych punktów związujemy pewną hiperprzestrzeń rozdzielającą wyznaczoną przez wektory α_i oraz liczby b_i spełniające warunki:

1° $\quad p_i \bullet \alpha_i > b_i$

2° $\quad \forall_{q \in W} \quad q \bullet \alpha_i \le b$

($\{x \in \mathbb{R}^n : x \bullet \alpha_i \le b_i\}$ jest półprzestrzenią zawierającą W,której brzeg jest hiperprzestrzenią rozdzielającą p_i oraz W)

3° $\quad \alpha_i \bullet \alpha_i + b_i^2 = 1$

Przyjmijmy $\overline{\alpha_i} = (\alpha_i, b) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Zbiór $\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, ...$ jest zwarty w kuli jednostkowej $K(0,1) \subset R^{n+1}$. Ponieważ $K(0,1)$ jest zwarta, to w ciągu $\overline{a_i}$ możemy wybrać podciąg zbieżny (ze względów redakcyjnych przyjmujemy, bez zmniejszenia ogólności, że $\overline{\alpha_i}$ jest zbieżny).

Oznacza to, że zbieżne też są ciągi α_i oraz b_i.

Przyjmijmy:

$\lim\limits_{i \to \infty} \alpha_i = \alpha$

$\lim\limits_{i \to \infty} b_i = b$

Ponadto $\lim\limits_{i \to \infty} \overline{\alpha_i} = \overline{\alpha}$ implikuje $\|\overline{\alpha}\| = 1$.

Badamy $H = \{x : \alpha \bullet x \le b\}$.

Dla dowolnego punktu $q \in W$ $\alpha_i \bullet q \le b_i$ więc $\alpha \bullet q \le b$ (bo nierówności tępe zachowują się przy przejściu do granicy). Więc $W \subseteq H$.

Aby wykazać, że ∂H jest hiperprzestrzenią podpierającą W w punkcie p wystarczy pokazać $\alpha \bullet p = b$. Ponieważ $p \in W$ więc $\alpha \bullet x \le b$. Ponadto $p \bullet a = \lim\limits_{i \to \infty} p \bullet a_i \ge \lim\limits_{i \to \infty} b_i = b$

□

4 Wielościany

Definicja 4.1 *Wielościanem (uogólnionym) w* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy część wspólną skończonej rodziny półprzestrzeni.*

W szczególności $\mathbb{R}^n$ *jako przecięcie pustej rodziny półprzestrzeni i* $\emptyset$ *są wielościanami.*

Tak jak trójkąt jest trójkątem niezależnie cy traktujemy go jako podzbiór płaszczyzny, przestrzeni 3 - wymiarowej czy większej tak też następne twierdzenie pokazuje, że pojęcie wielościanu nie zależy od wymiaru przestrzeni.

Twierdzenie 4.2 *Niech* W *będzie niepustym podzbiorem przestrzeni afinicznych* $V_1 \subset V_2$. *Wówczas* W *jest wielościanem w* V_1 *wtedy i tylko wtedy gdy* W *jest wielościanem w* V_2.

Dowód:
Przyjmijmy $V_1 \sim \mathbb{R}^n$ i $V_2 \sim \mathbb{R}^t$

$\Rightarrow$

Wprowadźmy układ bazowy $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ przestrzeni V_1 i rozszerzamy go do układu bazowego $(p; \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}, ..., \alpha_t)$ przestrzeni V_2. Teraz jeżeli $W = \bigcap_{i=1}^k H_i$, gdzie $H_i \subset V_1$ są opisane nierównościami
$H_i = \{x\,;\,(a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}) \bullet x \ \leq b_i\}$ to w przestrzeni V_2 zbiór W jest opisany układem nierówności: $(a_{i,1}, a_{i,2}, ..., a_{i,n}) \bullet x \ \leq b_i\}$ dla $1 \leq i \leq k$ oraz $x_j \leq 0$ i $-x_j \leq 0$ dla $n+1 \leq j \leq t$.

$\Leftarrow$ Niech $W = \bigcap_{i=1}^k H_i$, gdzie H_i są podprzestrzeniami V_2. Teraz $W = \bigcap_{i=1}^k (H_i \cap V_1)$ a $(H_i \cap V_1)$ może być półprzestrzenią w V_1 lub całą przestrzenią V_1.

$\square$

Definicja 4.3 *Ścianą zbiory wypukłego* W *nazywamy* $W \cap V$ *gdzie* V *jest hiperprzestrzenią podpierającą.*

Wymiarem ściany nazywamy liczbę $j = dim\ af(W \cap V)$.

Wierzchołkiem nazywamy taki punkt $p \in W$, *że istnieje półprzestrzeń* H *taka że* $W \leq H$ *i* $\{p\} = \partial H \cap W$.

Krawędź K *jest podzbiorem prostej, takim że* $|K| > 1$ *i istnieje półprzestrzeń* H *taka że* $W \subset H$ *i* $K = \partial H \cap W$.

Uwaga. Zwykle wierzchołkiem nazywać będziemy nie tylko zbiór $\{p\}$ ale także punkt p.

Twierdzenie 4.4 *Rozpatrujemy zadanie optymalizacji liniowej:*

Max $x_0 = c \bullet x$, *gdzie* $x \in W$ *i* W *jest opisane układem nierówności:*

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \le b_2 \\ \quad \vdots \\ \alpha_t \bullet x \le b_t \end{cases}.$$

Niech $p \in W$ *będzie takim punktem, że* $\alpha_i \bullet x = b_i$, *dla* $i = 1, 2, ..., j$ *oraz* $\alpha_i \bullet x < b_i$, *dla* $i > j$. *Wówczas:*

1) Jeżeli dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \ge 0, r_2 \ge 0, ..., r_j \ge 0$ $c = \sum_{i=1}^{j} r_i\alpha_i$ *to* p *jest punktem optymalnym tego zadania.*

2) Jeżeli p *jest punktem optymalnym tego zadania to* $\partial H = \{x \in R^n \ ; \ c \bullet x = c \bullet p\}$ *jest hiperprzestrzenią podpierającą* W *w punkcie* p.

Uwaga: Jednym z podstawowych twierdzeń teorii dualności jest:

p jest punktem optymalnym tego zadania wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \ge 0, r_2 \ge 0, ..., r_j \ge 0$ zachodzi $c = \sum_{i=1}^{j} r_i\alpha_i$.

Rozpoczynamy od naturalnego faktu.

Stwierdzenie 4.5 *Niech* $S = W \cap \partial H$ *będzie ścianą wielościanu* W. *Jeżeli* $S \ne W$ *to dim* $S <$ *dim* W.

Dowód:
Niech $q \in W \setminus S$. Ponieważ ∂H jest przestrzenią afiniczną więc $af(S) \subset \partial H$ i $q \notin \partial H$. Zatem $af(S) \ne af(W)$ co implikuje $dim\ S < dim\ W$.

□

Udowodnimy teraz lemat przygotowawczy:

Lemat 4.6 *Niech* $K \subset H$ *będzie* j*-wymiarową kulą o środku* p *zawartą w półprzestrzeni* H. *Jeżeli* $p \in \partial H$ *to* $K \subset \partial H$

Dowód:
Niech $q \in K \cap H \quad q \notin \partial H$. Przyjmijmy:

$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \bullet x \le b\}$ wtedy $\alpha \bullet q < b$ i $\alpha \bullet p = b$.

Ale $p = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}q'$ dla pewnego $q \in K$

Dochodzimy do sprzeczności, gdyż z jednej strony

$q' \in K \subset H$ implikuje $\alpha \bullet q' \le b$

zaś z drugiej strony

$\alpha \bullet q' = \alpha \bullet 2p - q = 2\alpha \bullet p - \alpha \bullet q = 2b - \alpha \bullet q > b$.

□

Definicja 4.7 *Niech* $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha \bullet x \le b\}$ *będzie półprzestrzenią. Półprzestrzenią dopełniającą nazywamy półprzestrzeń* $H^- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \bullet x \ge b\}$

Stwierdzenie 4.8 *Jeżeli* H *jest półprzestrzenią to* $H \cup H^- = \mathbb{R}^n$ *i* $H \cap H^- = \partial H = \partial H^-$.

Stwierdzenie to prowadzi bezpośrednio do wniosku.

Wniosek 4.9 *Niech* $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \subset \mathbb{R}^n$ *będzie wielościanem. Wówczas, dla każdego* i, $S = W \cap \partial H_i = W \cap H_i^-$ *jest ścianą lub zbiorem pustym.*

Lemat 4.10 *Niech* $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ *zaś* $S = W \cap \bigcap_{i=1}^{s} H_i^-$ *niepustym podzbiorem. Wówczas* S *jest ścianą* W.

Dowód:
Niech $H_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_i \bullet x \le b_i\}$ Definiujemy półprzestrzeń $H = \{x \in R^n : \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bullet x \le \sum_{i=1}^{s} b_i\}$. Oczywiście jeżeli $q \in W$ to $\forall_i\ \alpha_i \bullet x = b_i$ implikuje $q \in H$. Ponadto $S \subset \partial H$.

Niech teraz $q \in \partial H \cap W$ wtedy warunki $\forall_{i \le s}\ \alpha_i \bullet q \le b_i$ oraz $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bullet q = \sum_{i=1}^{s} b_i$ implikują $\alpha_i \bullet q = b_i$ dla $i \le s$. Zatem $S = \partial H \cap W$.

$\square$

5 Wierzchołki i krawędzie

Definicja 5.1 *Niech* $T \in \mathbb{R}^n$ *będzie niepustym podzbiorem. Relatywnym wnętrzem zbioru* T *nazywamy podzbiór* $rint(T) = \{p \in T\ ;\ \exists_{\varepsilon > 0} K(p, \varepsilon) \cap af(T) \subset T\}$.

Pojęcie relatywnego wnętrza jest praktyczniejsze przy badaniu wielościanów niż zwykłe wnętrze. Np. relatywnym wnętrzem odcinka w przestrzeni trójwymiarowej jest odcinek otwarty mimo,że cały odcinek jest brzegiem.

Stwierdzenie 5.2 *Jeżeli* T *jest niepustym podzbiorem wypukłym w* $\mathbb{R}^n$ *to* $rint(T) \neq \emptyset$.

Lemat 5.3 *Niech* p *będzie punktem wielościanu* $W \subset R^n$*, opisanego układem:*

$$\left\{ x \in R^n : \begin{array}{c} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \le b_2 \\ \vdots \\ \alpha_t \bullet x \le b_t \end{array} \right. .$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:
$\alpha_i \bullet x = b_i$ *dla* $1 \le i \le s$;
$\alpha_i \bullet x < b_i$ *dla* $s < i \le t$;
Oznaczmy literą j *liczbę* $n - rz\, A_p$ *czyli wymiar przestrzeni opisanej macierzą* A_p,

gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$, *jest podmacierzą macierzy opisującej* W *złożoną z* s *pierwszych wierszy macierzy opisującej* W.
Wówczas:

1) $S = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \ \cap \ \bigcap_{i \leq s} H_i^-$ jest ścianą wymiaru j i punkt p należy do jej relatywnego wnętrza.

2) p jest środkiem pewnej kuli j-wymiarowej kuli zawartej w W.

3) p nie jest środkiem żadnej kuli $j+1$ - wymiarowej kuli zawartej w W.

Dowód:

Z lematu 4.10 wynika, że S jest ścianą.

Badamy teraz wymiar ściany S.

Niech V będzie zbiorem rozwiązań układu równań pochodzących od s pierwszych nierówności opisujących W o macierzy A_p.
Czyli $V = \{x \in R^n \ ; \ \forall_{1 \leq i \leq s} \ \alpha_i \bullet x \ = b_i\}$. Na mocy twierdzenia Kroneckera - Capellego V jest przestrzenią afiniczną wymiaru j. Z określenia V mamy inkluzję $V \subset \partial H$. Dla punktów z W zachodzi też przeciwna inkluzja $\partial H \cap W \subset V$ czyli $S \subset V$. Rzeczywiście, niech $q \in S$. $\alpha_i \bullet q \ \leq b_i$ dla $i \leq s$ oraz $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bullet q \ \leq \ \sum_{i=1}^{s} b_i$ implikuje $\alpha_i \bullet q \ = \ b_i$ dla $i \leq s$. Otrzymujemy stąd oszacowanie wymiaru S $dimS \leq dimV = j$.

Budujemy kulę.

Istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla każdej półprzestrzeni H_i opisującej wielościan W, jeżeli $Q \notin \partial H \Rightarrow K(p\,;\varepsilon) \subset H$. Teraz $K = K(p\,;\varepsilon) \cap S$ jest kulą o środku p i zawartą w półprzestrzeniach H_i, dla $i > s$. Ponadto na mocy lematu 4.6 $K \subset \partial H$ stąd $K \subset S \subset W$. Stąd $dimK = j$.

Podsumujmy: Punkt p jest środkiem pewnej kuli j-wymiarowej kuli zawartej w $S \subset W$.

Ad 3) Niech K będzie kulą o środku p zawartą w wielościanie W. Wtedy $\forall_{i \leq s} \ K \subset H_i$ i $p \in \partial H_i$. Na mocy lematu 3.1 $K \subset \partial H \cap W = S$. Stąd $dim \ K \leq j$.

Przypuśćmy teraz, że wymiar ściany S jest większy niż j. Niech q będzie punktem wewnętrznym S. Wtedy istnieje kula K o środku w q wymiaru takiego jak ściana S. Wtedy $\forall_{i \leq s} \ K \subset H_i$ i $q \in \partial H_i$. Na mocy lematu 3.1 $K \subset \partial H \cap W = S$. Stąd $dim \ S \leq j$.

A zatem p jest punktem wewnętrznym j-wymiarowej ściany S.

$\square$

Stwierdzenie 5.4 *Niech $S = W \cap \partial H$ będzie ścianą wielościanu W. Wówczas $S = W \ \cap \ af(S)$.*

Dowód:

Inkluzja $S \subset W \ \cap \ af(S)$ jest oczywista.

Ponieważ $S \subset \partial H$ i ∂H jest podprzestrzenią więc $af(S) \subset \partial H$. Stąd $W \ \cap \ af(S) \subset W \cap \ \partial H = S$.

$\square$

Lemat 5.5 *Niech S będzie ścianą wielościanu $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ zaś p jej punktem wewnętrznym. Wówczas $S = W \cap \bigcap_{p\in\partial H_i} H_i^-$.*

Dowód:
Niech $S = W \cap \partial H$, dla pewnej półprzestrzeni $H \supset W$. Wówczas
$W = H \cap \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ i z dowodu poprzedniego lematu
$S = W \cap \partial H \cap \bigcap_{p\in\partial H_i} \partial H_i \subset W \cap \bigcap_{p\in\partial H_i} \partial H_i = \overline{S}$. Do dowodu $S = \overline{S}$ wystarczy zauważyć, że S jest ścianą samego wymiaru co $\overline{S}$, gdyż każda kula o środku w p zawarta w $\overline{S}$ jest zawarta w S.

□

Bezpośrednio z lematów 4.10 i 5.5 otrzymujemy:

Twierdzenie 5.6 *Niech $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \subset \mathbb{R}^n$ będzie wielościanem zaś T podzbiorem $\{1, 2, 3, ..., t\}$. Wówczas*
1) $S = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \cap \bigcap_{i\in T} H_i^-$ jest ścianą lub zbiorem pustym.
2) Każda ściana S wielościanu W jest postaci $S = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \cap \bigcap_{p\in H_i} H_i^-$, gdzie p jest dowolnym punktem z wnętrza S.

Wniosek 5.7 *Ściana ściany wielościanu jest ścianą.*

Popatrzmy jak poprzednie lematy można zastosować do opisu wierzchołków.

Twierdzenie 5.8 *Niech p będzie punktem wielościanu $W \subset R^n$, opisanego układem*

$$\left\{ x \in R^n : \begin{array}{l} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \le b_2 \\ \cdots \\ \alpha_t \bullet x \le b_t \end{array} \right. .$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:
$\alpha_i \bullet x = b_i$ dla $1 \le i \le s$;
$\alpha_i \bullet x < b_i$ dla $s < i \le t$;
Wówczas równoważne są warunki:
1) p jest wierzchołkiem wielościanu W..
2) p nie jest środkiem odcinka zawartego w W.
2a) p nie jest nietrywialną kombinacją wypukłą punktów z W.
3) rząd macierzy $A_p = n$ gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$, jest podmacierzą macierzy opisującej W złożoną z s pierwszych wierszy macierzy opisującej W.

Dowód:

Implikacje 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) wynikają bezpośrednio z lematu 5.4.
Implikacja 2) $\Rightarrow$ 2a) jest oczywista.
Dowód 2a) $\Rightarrow$ 2). Niech $p = \sum_{i=1}^{t} r_i p_i$ będzie nietrywialną kombinacją wypukłą punktów z W. To znaczy $\forall_i\, r_i > 0$ i wszystkie punkty są różne. Wtedy $p = r_1 p_1 + (1 - r_1) \sum_{i=2}^{t} r_i p_i$ należy do wnętrza odcinka o końcach p_1 i $\sum_{i=2}^{t} r_i p_i$ a więc jest środkiem pewnego mniejszego odcinka zawartego w W.

$\square$

Wniosek 5.9 *Wielościan ma co najwyżej skończoną liczbę wierzchołków. Dokładniej: Jeżeli W jest wielościanem w R^n opisanym przez t półprzestrzeni to W zawiera co najwyżej $\binom{t}{n}$ wierzchołków.*

Algorytm szukania wierzchołków.

Z nierówności opisujących wielościan wybieramy n liniowo niezależnych. Zamieniamy je na równania i rozwiązujemy otrzymany układ n równań.

Ponieważ równania są niezależne rozwiązanie jest jednoznaczne. Jeżeli rozwiązanie spełnia pozostałe nierówności to otrzymaliśmy wierzchołek.

Procedurę tą możemy stosować $\binom{t}{n}$ razy.

Analogicznie możemy opisywać krawędzie.

Twierdzenie 5.10 *Niech p będzie punktem wielościanu $W \subset R^n$, opisanego układem:*

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \le b_2 \\ \quad \cdots \\ \alpha_t \bullet x \le b_t \end{cases}.$$

Dodatkowo zakładamy, że równania są tak ustawione by:
$\alpha_i \bullet x = b_i$ *dla* $1 \le i \le s$;
$\alpha_i \bullet x < b_i$ *dla* $s < i \le t$;
Wówczas równoważne są warunki:
1) p jest punktem wewnętrznym krawędzi wielościanu W. ($p \in rint(W)$)
2) p jest środkiem odcinka zawartego w W ale nie jest środkiem koła zawartego w W.
3) rząd macierzy $A_p = n - 1$ gdzie $A_p = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_s \end{bmatrix}$, jest podmacierzą macierzy opisującej W złożoną z s pierwszych wierszy macierzy opisującej W.

Wniosek 5.11 *Wielościan ma co najwyżej skończoną liczbę wierzchołków. Dokładniej: Jeżeli W jest wielościanem w R^n opisanym przez t półprzestrzeni to W zawiera co najwyżej $\binom{t}{n-1}$ wierzchołków.*

Algorytm szukania krawędzi.

Z nierówności opisujących wielościan wybieramy n-1 liniowo niezależnych. Zamieniamy je na równania i rozwiązujemy otrzymany układ n-1 równań.

Ponieważ równania są niezależne rozwiązanie jest prosta, nazwijmy ją l. Aby wyliczyć krawędź zawartą w otrzymanej prostej przedstawiamy ją w postaci parametrycznej $l = q + t\alpha, t \in R$. Wstawiamy równanie prostej do pozostałych nierówności i otrzymujemy ograniczenia na t.

Procedurę tą możemy stosować $\begin{pmatrix} t \\ n-1 \end{pmatrix}$ razy.

Algorytm szukania krawędzi wychodzących z wierzchołka p.

Wypisujemy wszystkie nierówności, które punkt p spełnia jako równości. Z tego zbioru n-1 liniowo niezależnych. i dalej jak w poprzednim algorytmie.

Twierdzenie 5.12 *Niech* $W \subseteq R^n$ *będzie wielościanem* $\neq \emptyset$ *opisanym wzorem* $W = \left\{x \in R^n : Ax^T \leq b\right\}$

Wówczas równoważne są warunki:

1) *W zawiera wierzchołek*

2) $rzA = n$

3) *W nie zawiera prostej*

Dowód:

1) $\Rightarrow$ 2) wniosek z poprzedniego twierdzenia

Dowód 2) $\Rightarrow$ 3)

Przypuśćmy, że $\{p + r\alpha : r \in R\}$ jest prostą w W $(p, \alpha \in R^n)$

$\forall_{r \in R} \quad A(p + r\alpha) \leq b$

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_t \end{bmatrix}}^{n} \quad b = \left.\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_t \end{bmatrix}\right\} t$$

$\forall_{1 \leq i \leq s} \quad \alpha_i \bullet p + r\alpha \leq b_i$

$\alpha_i \bullet p + r\alpha_i \bullet \alpha \leq b_i$

$r(\alpha_i \bullet \alpha) \leq b_i - \alpha_i \bullet p$

$\forall_{1 \leq i \leq s} \quad \forall_{t \in R} \quad r(\alpha_i \bullet \alpha) \leq b_i - \alpha_i \bullet p$.

Ale $\alpha_i \bullet \alpha > 0 \Rightarrow r \leq \frac{b_i - \alpha_i \bullet p}{\alpha_i \bullet \alpha}$

$a_i \bullet \alpha < 0 \Rightarrow r \leq \frac{b_i - \alpha_i \bullet p}{\alpha_i \bullet \alpha}$.

Zatem $\alpha_i \bullet \alpha = 0$

i α jest niezerowym rozwiązaniem jednorodnego układu równań liniowych $A[y] = \theta$.

Wynika stąd, że wymiar przestrzeni rozwiązań jest ≥ 1. Na mocy twierdzenia Kroneckera - Capellego $rzA < n$

-sprzeczność

3) $\Rightarrow$ 1)

Każdemu punktowi $p \in W$ przyporządkowujemy najmniejszą liczbę naturalną n_p, taką, że p leży na ścianie wymiaru n_p

Niech $q \in W$ będzie punktem takim, że liczba n_q jest najmniejsza.

Bez zmniejszania ogólności można przyjąć

$$\begin{array}{rl} \alpha_1 \bullet q & = b_1 \\ \alpha_2 \bullet q & = b_2 \\ \vdots & \\ \alpha_k \bullet q & = b_k \\ \alpha_{k+1} \bullet q & < b_{k+1} \\ \vdots & \\ \alpha_t \bullet q & < b_t \end{array}$$

Oznacza to, że indeks

$$n_q = n - rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$$

Przypuśćmy, że $n_q \neq 0$ czyli $rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} < n$

Wtedy układ równań $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

ma niezerowe rozwiązanie α. Zatem prosta $\{q + t\alpha : t \in R\}$ spełnia

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} \cdot [q + t\alpha] \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

prosta $q + t\alpha \subset W$ $\{t \in R; q + t\alpha \in W\}$ jest właściwym podzbiorem R. Więc istnieje punkt graniczny t_0. Przyjmijmy, że $\forall_{t > t_0} \quad q + t\alpha \notin W \quad q + t_0\alpha \in W$. Oznacza to, że istnieje $i > k$ taki, że $\alpha_i \bullet q + t_0\alpha = b_i$ $n_q + t_0 < n_q$

-sprzeczność

$\square$

Wniosek 5.13 *Niech $\emptyset \neq W_1 \subset W_2$ będą wielościanami. Jeżeli W_2 zawiera wierzchołek to W_1 też zawiera wierzchołek.*

Dowód:
W_2 zawiera wierzchołek $\Rightarrow W_2$ nie zawiera prostej $\Rightarrow W_1$ nie zawiera prostej $\Rightarrow W_1$ zawiera wierzchołek.

$\square$

Wniosek 5.14 *Niech $\emptyset \neq W \subset R^n$ będzie opisane $W = \{x \in R^n; Ax = b \wedge x \geq 0\}$ Wtedy W zawiera wierzchołek*

Dowód:

$W \subset W_2$ gdzie $W_2 = \{x \in R^n, x \geq 0\}$ czyli $-x \leq 0$

$$\text{ale } rz \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ & \vdots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix} = n$$

Stąd W_2 zawiera wierzchołek, więc W_1 też.

$\square$

Twierdzenie 5.15 *Niech $W \subset R^n$ będzie wielościanem z wierzchołkiem. Niech S będzie ścianą wielościanu W. Wówczas S ma wierzchołek i każdy wierzchołek S jest wierzchołkiem W.*

Dowód:

Przyjmijmy $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$, $S = W \cap \partial H = \bigcap_{i=1}^{t} H_i \cap \partial H$, gdzie H_i, H są półprzestrzeniami, $W \subset H$ i ∂H jest hiperprzestrzenią podpierającą W w punkcie p; ($p \in W \cup \partial H$). Niech $H = \{x \ ; \ \alpha \bullet x \leq b\}$.

S jest wielościanem więc na mocy poprzedniego wniosku zawiera wierzchołek. Przypuśćmy, że p jest wierzchołkiem S ale nie jest wierzchołkiem W. Zatem rząd macierzy powstałej z wektorów opisujących te półprzestrzenie H_i, że $p \in \partial H_i$ jest mniejszy niż n. Stąd $p \in \partial H$. Niech q_1, q_2 będą końcami odcinka zawartego w W, którego p jest środkiem. Przyjmijmy $q_1 \in S \subseteq W$. Wtedy $p \in H \setminus \partial H$. Stąd $\alpha \bullet q_1 < b$.

Ale $\alpha \bullet q_2 = \alpha \bullet (2p - q_1) = \alpha \bullet 2p - \alpha \bullet q_1 > b$. Otrzymaliśmy sprzeczność bo $q_2 \in W \subseteq H$.

$\square$

Bezpośrednio stąd wynika.

Wniosek 5.16 *Niech $W \subset R^n$ będzie wielościanem z wierzchołkiem. Wtedy każda krawędź wielościanu W zawiera pewien wierzchołek W.*

Zajmiemy się teraz innym opisem wielościanów.

6 Twierdzenia strukturalne

Twierdzenie 6.1 *1) Niech* $p_1, p_2, ..., p_t$ *oraz* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *należą do* R^n. p_i *traktujemy jako punkty zaś* α_j *jako wektory. Wówczas zbiór*

$$S = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geq 0 \wedge s_j \geq 0 \right\}.$$

jest wielościanem.

2) Jeżeli W *jest wielościanem to istnieją takie punkty* $p_1, p_2, ..., p_t$ *oraz wektory* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, *że* $W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geq 0 \wedge s_j \geq 0 \right\}$.

3) Jeżeli W *jest wielościanem z wierzchołkiem, gdzie* $p_1, p_2, ..., p_t$ *jest zbiorem wierzchołków* W *zaś* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ *jest zbiorem wektorów krawędzi nieograniczonych to* $W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge r_i \geq 0 \wedge s_j \geq 0 \right\}$.

Twierdzenie to ma skomplikowany dowód więc przedstawimy go dopiero po wprowadzeniu teorii dualności.

Z twierdzenia strukturalnego wynika, że każdy wielościan można przedstawić w postaci sumy algebraicznej. Gdy
$W = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge \forall_{0 \leq i \leq t}\ r_i \geq 0 \wedge \forall_{0 \leq j \leq k}\ s_j \geq 0 \right\}$
to $W = T + S$, gdzie $T = \left\{ \sum_{i=1}^{t} r_i p_i \mid \sum_{i=1}^{t} r_i = 1 \wedge \forall_{0 \leq i \leq t}\ r_i \geq 0 \right\}$ jest wielościanem klasycznym zaś $S = \left\{ p_1 + \sum_{j=1}^{k} s_j \alpha_j \mid \forall_{0 \leq j \leq k}\ s_j \geq 0 \right\}$ jest stożkiem.

Aby przybliżyć twierdzenie przedstawimy przykład gdy W jest sympleksem:

Przykład 6.2 *Niech* $p_0, p_1, \cdots, p_n$ *będzie układem punktów z* R^n *w położeniu ogólnym, takim że* $\det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} > 0$. *Wówczas* $W = Conv\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ *jest wielościanem opisanym układem* $n+1$ *nierówności:*

0) $\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ & & p_1 & & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_n & & 1 \end{bmatrix} > 0$

1) $\det \begin{bmatrix} & & p_0 & & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\ & & p_2 & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_n & & 1 \end{bmatrix} > 0,$

$\vdots$

$$n)\ \det \begin{bmatrix} & & p_0 & & 1 \\ & & p_1 & & 1 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & p_{n-1} & & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_x & 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Ponadto zbiorem wierzchołków W jest $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ zaś krawędziami są odcinki łączące dowolne dwa wierzchołki.

Dowód:

Niech $q \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym punktem. Ponieważ zbiór $\{p_0, p_1, \cdots, p_n\}$ jest bazą punktową $\mathbb{R}^n$ więc istnieje taki układ wag $\{r_0, r_1, \cdots, r_n\}$, $(\sum_{i=0}^n r_i = 1)$, że $q = \sum_{i=0}^n r_i p_i$. Badamy kiedy punkt q spełnia j-tą nierówność.

$$0 \le \det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ q & 1 \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ \sum_{i=0}^n r_i p_i & \sum_{i=0}^n r_i \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} =$$

teraz dla $i \neq j$ od j- tego wiersza macierzy odejmujemy wiersz i-ty pomnożony przez r_i.

$$= \det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_{j-1} & 1 \\ r_j p_j & r_j \\ p_{j+1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix} = r_j \cdot \det \begin{bmatrix} p_0 & 1 \\ p_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że punkt q spełnia j-tą nierówność wtedy i tylko wtedy gdy $r_j \ge 0$. Zatem punkt $q \in W$ wtedy i tylko wtedy gdy spełnia wszystkie $n+1$ nierówności.

Ponieważ dla każdego j punkt p_j spełnia wszystkie za wyjątkiem j-tej nierówności jako równania więc jest wierzchołkiem. Więcej wierzchołków nie ma gdyż n nierówności ze zbioru n+1 elementowego można wybrać na n+1 sposobów. Podobnie n-1 nierówności można wybrać na $\begin{pmatrix} n+1 \\ n-1 \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2}$ sposobów czyli tyle ile jest par wierzchołków.

$\square$

Wprowadźmy zatem formalną definicję.

Definicja 6.3 *Stożkiem nazywamy wielościan który ma dokładnie jeden wierzchołek.*

Stwierdzenie 6.4 *Ściana stożka jest stożkiem.*

Dowód:
Niech S będzie ścianą stożka W. Na mocy wniosku 5.13 S ma wierzchołek zaś na mocy wniosku 5.7 jest to jedyny wierzchołek.

□

Stwierdzenie 6.5 *Jeżeli stożek W ma więcej niż jeden punkt to ma krawędź nieskończoną.*

Dowód:
Niech $\{p\} = W \cap \partial H$ będzie wierzchołkiem W zaś q dowolnym innym punktem stożka. Teraz $S = W \cap (\partial H + \overrightarrow{p,q})$ jest wielościanem zawierającym q a nie zawierającym p. S ma wierzchołki na mocy wniosku 5.13. Niech q_1 będzie wierzchołkiem S. Wówczas q_1 leży na przecięciu brzegów n liniowo niezależnych półprzestrzeni opisujących S. Jednym z nich jest $\partial H + \overrightarrow{p,q}$ a pozostałe $n-1$ opisują W. Zatem q_1 należy do krawędzi W i $\overrightarrow{p,q_1}$ jest wektorem krawędzi nieskończonej.

□

Lemat 6.6 *Niech p będzie punktem wielościanu W (zbioru wypukłego i domkniętego). Jeżeli wektor β spełnia warunek: $\forall_{t\geq 0}\ p + t\beta\ \in W$ to $\forall_{q\in W}\forall_{t\geq 0}\ q + t\beta\ \in W$.*

Dowód:
1) Niech $W = \{x \in R^n; \alpha \bullet x\ \leq b\}$ będzie półprzestrzenią. Teraz:
$\forall_{t\geq 0}\ \alpha \bullet p + t\beta \leq b$
$\forall_{t\geq 0}\ \alpha \bullet p + t\alpha \bullet \beta \leq b$
$\forall_{t\geq 0}\ t\alpha \bullet \beta \leq b - \alpha \bullet p$
to implikuje $\alpha \bullet \beta \leq 0$
$\forall_{t\geq 0}\ \alpha \bullet q + t\beta = \alpha \bullet q + t\alpha \bullet \beta \leq \alpha \bullet q \leq b$

□

Twierdzenie 6.7 *Niech $W \in \mathbb{R}^n$ będzie stożkiem. Wówczas $W = \left\{p + \sum_{j=1}^{k} s_j\alpha_j \mid s_j \geq 0\right\}$ gdzie p jest wierzchołkiem W zaś $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest zbiorem wektorów krawędzi nieograniczonych.*

Dowód:
Dowód przez indukcję względem wymiaru W.

1^0 Jeżeli $dim\, W = 0$ to Wjest punktem i dowód jest oczywisty.

2^0 Niech p będzie wierzchołkiem $W = \bigcap_{i=1}^{t} H_i$ zaś q dowolnym innym punktem stożka. Niech α będzie wektorem krawędzi nieskończonej. Prosta $l = \{q + r\alpha\, ;\ r \in R\}$ przecięta z W daje półprostą o początku q_1. Istnieje zatem $j \leq t$ takie, że $q_1 \in \partial H_j$ oraz $q \notin \partial H_j$. Ściana $W \cap \partial H_j$ ma mniejszy wymiar niż W więc z założenia indukcyjnego $q_1 = p + \sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i$ dla pewnych $s_j \geq 0$ i wektorów krawędzi nieograniczonych $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$. Zatem $q = q_1 + s\alpha = p + \sum_{i=1}^{k} s_i\alpha_i s\alpha$ ma żądane przedstawienie.

□

7 Geometryczny algorytm metody sympleks

Definicja 7.1 *Rozważmy zagadnienie PL*

$Max\,\{x_0 = c \bullet x\ : x \in W\}$

Niech p będzie wierzchołkiem W, zaś α wektorem kierunkowym krawędzi wychodzącej z p

$\{p + t\alpha : t > 0\}$ *lub* $\{p + t\alpha : t \in [0, r]\}$ *jest krawędzią.*

Krawędź tą nazywamy:

poprawiającą gdy $c \bullet \alpha > 0$,

neutralną gdy $c \bullet \alpha = 0$,

pogarszającą gdy $c \bullet \alpha < 0$.

W przypadku zadania $Min\,\{x_0 = d \bullet x\ : x \in W\}$ krawędź nazywamy:

poprawiającą gdy $d \bullet \alpha < 0$,

neutralną gdy $d \bullet \alpha = 0$,

pogarszającą gdy $d \bullet \alpha > 0$.

Twierdzenie 7.2 *Jeśli z wierzchołka p wielościanu W nie wychodzi żadna krawędź poprawiająca to p jest punktem optymalnym zadania PL*

$Max\,\{x_0 = c \bullet x \mid x \in W\}$

Inaczej mówiąc:

Jeżeli p jest wierzchołkiem wielościanu W i jeśli dla każdego wektora α krawędzi wychodzącej z p iloczyn skalarny $c \bullet \alpha \le 0$ to $\forall_{q \in W}\ c \bullet p \ge c \bullet q$

Dowód:

Możemy przyjąć, że wielościan W jest opisany układem nierówności

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \alpha_2 \bullet x \le b_2 \\ \quad\vdots \\ \alpha_k \bullet x \le b_k \\ \quad\vdots \\ \alpha_t \bullet x \le b_t \end{cases}$$

Ponadto

$$\begin{array}{rl} \alpha_1 \bullet p & = b_1 \\ \alpha_2 \bullet p & = b_2 \\ \vdots & \\ \alpha_k \bullet p & = b_k \\ \alpha_{k+1} \bullet p & < b_{k+1} \\ \vdots & \\ \alpha_t \bullet p & < b_t \end{array}$$

Zbudujmy większy wielościan U opisany pierwszymi k nierównościami:

$$\begin{cases} \alpha_1 \bullet x \le b_1 \\ \quad\vdots \\ \alpha_k \bullet x \le b_k \end{cases}$$

Wtedy $W \subseteq U$ i p jest jedynym wierzchołkiem U gdyż p jest wierzchołkiem $W \Leftrightarrow rz \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = n \Rightarrow p$ jest wierzchołkiem U. Jeśli α jest wektorem krawędzi U wychodzącej z p to α jest wektorem kierunkowym krawędzi W wychodzącej z p : niech $p + \xi\alpha \in W$ ponieważ jest to punkt krawędziowy, więc rząd macierzy utworzonej przez nierówności spełnione przez $p + \xi\alpha$ jako równość, jest równy $n - 1$ dla każdego $\xi > 0$.

Przenumerowując nierówność w razie potrzeby możemy przyjąć

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bullet p + \xi\alpha &= b_1 \\ &\dots \\ \alpha_s \bullet p + \xi\alpha &= b_s \\ \alpha_{s+1} \bullet p + \xi\alpha &\le b_{s+1} \\ &\dots \\ \alpha_k \bullet p + \xi\alpha &\le b_k \end{aligned}$$

Dla dostateczne małych ξ dodatkowo $\begin{aligned} \alpha_{k+1} \bullet p + \xi\alpha &\le b_{k+1} \\ &\dots \\ \alpha_t \bullet p + \xi\alpha &\le b_t \end{aligned}$

$rz \begin{bmatrix} a_n \\ \dots \\ a_s \end{bmatrix} = n - 1 \Rightarrow \alpha$ jest wektorem krawędziowym (jest dobry)

na mocy twierdzenia 6.7

$U = \{p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i : r_i \ge 0$ oraz $\alpha_1, \alpha_1, ..., \alpha_1$ są wszystkimi wektorami krawędzi U

Weźmy dowolny punkt $q \in W$. Wtedy $q \in U = p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i$.

Zatem

$x_0(q) = c \bullet q = c \bullet p + \sum_{i=1}^{m} r_i\alpha_i = c \bullet p + \sum_{i=1}^{m} r_i 0 \bullet \alpha_i \le c \bullet p = x_0(p)$.

$\square$

Wniosek 7.3 *Jeśli zadanie PL ma rozwiązanie to istnieje wierzchołek obszaru dopuszczalnego, który jest punktem optymalnym.*

Wniosek 7.4 *Badając krawędzie wychodzące z wierzchołka p możemy rozstrzygnąć, czy jest to punkt optymalny.*

Algorytm metody Sympleks (geometryczny):

Dany wielościan opisany układem t nierówności w R^n. Dany wierzchołek p (startowy).

$x =$ zmienna (punkty)
$\alpha =$ zmienna (wektory)
0) $x := p$
1) budujemy tablicę T złożona z kandydatów na krawędzie wychodzące z wierzchołka x
2) dopóki $T \neq \emptyset$ wykonujemy
3) wybieramy α z T i usuwamy
Jeżeli α jest wektorem krawędzi poprawiającej to:
Jeżeli α jest wektorem krawędzi nieskończonej to
4) stop: zadanie nieograniczone
Jeżeli α jest wektorem krawędzi skończonej to
5) znajdujemy jej drugi koniec q
$x := q$ i wracamy do punktu 1)
6) $T = \emptyset$ stop: x jest wierzchołkiem optymalnym

Uwaga. Algorytm sympleks jest skończony gdyż wielościan ma skończoną liczbę wierzchołków i krawędzi.

Przykład 7.5 *Badamy zadanie* $Max\, x_0 = 3x_1 - 2x_2$, *gdzie*
$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ \quad\;\; x_2 \le 5 \end{cases}$$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Jako wierzchołek startowy weźmiemy punkt $(0,0)$.
Jest on opisany układem
$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ pochodzącym z dwóch ostatnich nierówności.
Wychodzą z niego dwie krawędzie w kierunku wektora $(1,0)$ - poprawiająca i w kierunku wektora $(0,1)$ - pogarszająca.
Wybieramy krawędź $(0,0) + t(1,0)$ i szukamy ograniczenia na t podstawiając do pozostałych nierówności. $\begin{cases} t \le 2 \\ 0 \le 5 \\ t \geq 0 \end{cases}$
Więc $t \in [0,2]$ i drugim końcem krawędzi jest wierzchołek $(2,0)$ opisany układem $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ \quad\;\; x_2 = 0 \end{cases}$ pochodzącym z pierwszej i ostatniej nierówności. Opuszczając pierwszą równość otrzymamy krawędź, którą przyszliśmy a więc z punktu widzenia wierzchołka $(2,0)$ krawędź pogarszającą. Opuszczamy równanie $x_2 = 0$. Równanie $x_1 - x_2 = 2$ opisuje prostą $\{(2+t,t);\ t \in R\}$. wstawiamy do pozostałych nierówności i otrzymujemy:
$\begin{cases} t \le 5 \\ t + 2 \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$. Więc $t \in [0,5]$ i drugim końcem krawędzi jest wierzchołek $(7,5)$ opisany układem $\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ \quad\;\; x_2 = 5 \end{cases}$ pochodzącym z pierwszej i drugiej

nierówności. Zauważmy, że funkcja celu wzrosła z 2 do $3 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = 11$ więc krawędź była poprawiająca.

Z wierzchołka $(7, 5)$ wychodzą dwie krawędzie, pogarszająca, którą przyszliśmy i leżąca na prostej opisanej równaniem $x_2 = 5$. Wstawiając do pierwszej nierówności otrzymujemy $x_1 + 5 \leq 5$. Więc wektorem kierunkowym jest $(-1, 0)$. Jest to krawędź pogarszająca i stąd $(7, 5)$ jest wierzchołkiem optymalnym.