Szukanie wierzchołka startowego

Jeżeli zadanie PL opisane jest macierzą, która nie jest tablicą sympleks to by móc stosować metodę sympleks stosujemy chwyt genialny w swej prostocie - dopisujemy macierz jednostkową. Dokładniej:

Dwufazowa metoda sympleks

Badamy zadanie:

$Max \quad x_0 = cx$

$Ax = b$

$x \geq 0$

macierzą układu jest $[A|b]$

Mnożąc w razie potrzeby niektóre równania przez -1 możemy przyjąć, że $b \geq 0$. Aby uzyskać TS dopisujemy macierz jednostkową i otrzymujemy tablicę sympleks $TS = [A|I|b]$.

Odpowiada temu układ równań

$Ax + Iy = b$

gdzie $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_t \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{t,1} & a_{t,2} & \dots & a_{1t,n} \end{bmatrix}$

Pierwsza faza

Rozwiązujemy zadanie $PL\,(*)\,Max\ y_0 = -y$

$Ax + Iy = b$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

zadanie $(*)$ nie jest nieograniczone ponieważ $y \geq 0 \Rightarrow y_0 \leq 0$. dodatkowo jeżeli p należy do obszaru dopuszczalnego zadania pierwotnego - $Ap = b\ p \geq 0$ to

$\overline{p} = (p, 0, ..., 0)$ jest punktem optymalnym $(*)$ gdyż

$$[A|I]\overline{p} = A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} + I \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = b$$

zaś $y_0(\overline{p}) = 0$

I Przypadek:

Jeżeli zadanie $(*)$ ma rozwiązanie, w którym $y_{0max} < 0$ to wielościan $W = \{x \in R^n\ ;\ Ax = b\ x \geq 0\}$ jest zbiorem pustym (zadanie pierwotnie sprzeczne).

II Przypadek:

Jeżeli $y_{0max} = 0$ to TS opisująca wierzchołek optymalny zadania $(*)$ pozwala nam opisać wierzchołek zadania pierwotnego.

$T = [\overline{A}|D|\overline{b}]$

a) Jeżeli wszystkie zmienne $y_1, y_2, ..., y_t$ są niebazowe to macierz powstała po wykreśleniu kolumn z nimi związanych jest TS opisująca wierzchołek obszaru dopuszczalnego zadania pierwotnego.

Rzeczywiście. Jeżeli $(p_1, .., p_n, y_1, ..., y_t)$ jest wierzchołkiem opisanym $[\overline{A}|D|\overline{b}]$ to $y_1 = 0, ..., y_t = 0$, $\overline{A}p = \overline{b}$

($\overline{A}$ zawiera macierz jednostkową)

$[\overline{A}|\overline{b}]$ powstała z $[A|b]$ przez operacje elementarne na wierszach, więc opisuje ten sam wielościan.

b) Niech y_i będzie zmienną bazowa. Przyjmijmy, że kolumna odpowiadająca y_i ma jedynkę w j-tym wierszu i pozostałe współrzędne $= 0$.

1^0 jeżeli wiersz j-ty ma tylko jeden element niezerowy (j-ty wiersz $\overline{A}$ jest zerowy) to znaczy, że $[A|b]$ i A były układem zależnym. Taki wiersz i kolumny można wykreślić (w praktyce zostaje).

2^0 Jeżeli istnieje $a_jr \neq 0$ w j-tym wierszu macierzy $\overline{A}$ to wybieramy go jako element centralny i po przekształceniach elementarnych otrzymujemy TS, w której y_j jest niebazowe, zaś x_r jest dołączone do bazy.

Po wykonaniu I fazy otrzymujemy TS opisującą wierzchołek obszaru dopuszczalnego T lub informację, że zadanie było sprzeczne.

Druga faza:

Najpierw budujemy wiersz kosztów zredukowanych

$Max \quad x_0 = cx$

Koszty zredukowane to $x_0 = dx + b_0$ gdzie $d = (d_1, ..., d_n)$ to $d_j = 0$ gdy x_j - bazowa. Wektor d wyliczamy wstawiając do równania $x_0 = cx$

równania $x_j = \overline{b_j} - a_{ji}x_i$ pochodzące z TS $[A^*|b^*] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1_n} & b_1^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{t,1} & a_{t,2} & \dots & a_{t,n} & b_t^* \end{array}\right]$

Dalej zadanie rozwiązujemy prosta metodą sympleks.

Przykład 10.1 *Badamy zadanie:*

$Max\ x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$

$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

I faza:

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 i y_2 i funkcje celu

$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$

$y_0 + y_1 + y_2 = 0$

$y_0 - (8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 4) - (3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 1) = 0$

$y_0 - 11x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -5$

baza sztuczna

x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
-11	-4	7	0	0	0	-5
8	3	-5	1	1	0	4
3	(1)	-2	-1	0	1	1

(dla zmiennych niesztucznych suma jest równa 0)

Wybieramy kolumnę poprawiającą x_2.

$Min \left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ *i element centralny zaznaczamy nawiasem*

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 4 & -1 \\
\hline
-1 & 0 & (1) & 4 & 1 & -3 & 1 \\
3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrrr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 & 3
\end{array}$$

Zmienne sztuczne wypadły z bazy więc możemy je wykreślić. Pozostała tablica opisuje wierzchołek startowy $(0, 3, 1, 0)$.

Wracamy do pierwotnej funkcji celu i liczymy koszty zredukowane:

$x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 7x_1 + 2(-x_1 - 7x_4 + 3) - 3(x_1 - 4x_4 + 1) - x_4 = 2x_1 - 3x_4 + 3$

i otrzymujemy tablicę sympleks:

$$\begin{array}{rrrr|r}
-2 & 0 & 0 & 3 & 3 \\
\hline
-1 & 0 & 1 & 4 & 1 \\
(1) & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}$$

Pierwsza kolumna wyznacza krawędź poprawiającą. Idąc nią otrzymujemy.

$$\begin{array}{rrrr|r}
0 & 2 & 0 & 17 & 9 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 11 & 4 \\
1 & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}$$

Ta tablica opisuje jedyny wierzchołek optymalny $(3, 0, 4, 0)$,
w którym $x_{max} = 9$

Przykład 10.2 *Badamy zadanie:*

$Max\ x_0 = 3x_1 + 8x_2 - 2x_3 - x_4$

$2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 = 3$

$x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

I faza:

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 *i* y_2 *i funkcje celu*

$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$

$0 = y_0 + y_1 + y_2 = y_0 - (2x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 3) - (x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 - 5)$

$y_0 - 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -8$

co daje tablicę sympleks

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-3 & -2 & 4 & -5 & 0 & 0 & -8 \\
\hline
2 & 1 & -1 & (6) & 1 & 0 & 3 \\
1 & 1 & -3 & -1 & 0 & 1 & 5
\end{array}\right]$$

stosując prosty algorytm metody sympleks otrzymujemy kolejno:

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
-\frac{4}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{19}{6} & 0 & \frac{5}{6} & 0 & -\frac{11}{2} \\
\hline
\frac{1}{3} & (\frac{1}{6}) & -\frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{4}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & 0 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{11}{2}
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrrrrr|r}
1 & 0 & 2 & 7 & 2 & 0 & -2 \\
\hline
2 & 1 & -1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\
-1 & 0 & -2 & -7 & -1 & 1 & 2
\end{array}\right]$$

Nad kreską są same liczby nieujemne a funkcja celu jest równa -2 zatem zadanie jest sprzeczne (obszar dopuszczalny jest zbiorem pustym).

Metoda częściowej bazy sztucznej
W metodzie dwufazowej wystarczy dodać tylko tyle zmiennych sztucznych, by otrzymać macierz jednostkową.
np.
$Max\ x_0 = cx$
$A_1 x \leq b_1$
$A_2 x = b_2$
$x \geq 0$
W tym przypadku mamy t_1 zmiennych bazowych i gdy $b_1 \geq 0$ dodajemy tylko t_2 zmiennych sztucznych.
$Max \quad x_0 = cx$
$A_1 x + I_{t_1}\overline{x} = b_1$
$A_2 x + I_{t_2} y = b_2$
$x \geq 0$
$\overline{x} \geq 0$
$y \geq 0$
W przypadku rzeczywistych obliczeń (na maszynach) zwykle nie stosuje się częściowej bazy sztucznej. Nie trzeba wówczas wyszukiwać w macierzy A kolumn zero - jedynkowych.

11 Modyfikacje dwufazowej metody sympleks

Można obie fazy rozwiązać na jednej TS. W zadaniu:
$Max \quad x_0 = cx$
$Ax = b$
$x \geq 0$
Rozważamy obie funkcje celu jednocześnie.
$Max \quad x_0 = cx$
$Max \quad y_0 = -y$
$Ax + Iy = b$
$x \geq 0 \qquad y \geq 0$
Budujemy tablicę sympleks mającą dwa wiersze nad kreską.

$$TS = \overline{B^{-1}} \cdot \left[\begin{array}{c|c|ccccc|ccc|c} x_0 & y_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n & & y_1 & \ldots & y_t & ww \\ 1 & 0 & & & -c & & & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & & 1 & ... & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & A & & & & I & & b \end{array}\right],$$

gdzie

$$\overline{B} = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0...0 \\ 0 & 1 & 1...1 \\ \hline 0 & 0 & I \end{array}\right]$$

W fazie 1 maksymalizujemy y_0 i w rezultacie otrzymujemy, że zadanie jest sprzeczne lub TS opisująca wierzchołek startowy (łącznie z kosztami zredukowanymi funkcji x_0).

Ta metoda nigdy nie prowadzi do zmniejszenia liczby operacji (np. wyszło, że zadanie jest sprzeczne, więc naliczyliśmy się zupełnie niepotrzebnie).

Przykład 11.1 *Badamy zadanie:*

$$Max\ x_0 = 7x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

I faza:
Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1 i y_2 i funkcje celu

$$Max\ y_0 = -y_1 - y_2$$
$$y_0 + y_1 + y_2 = 0$$
$$y_0 - (8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 4) - (3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 1) = 0$$
$$y_0 - 11x_1 - 4x_2 + 7x_3 = -5$$

baza sztuczna

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc|c} y_0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & WW \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & -11 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 & -5\\
0 & 1 & -7 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 8 & 3 & -5 & 1 & 1 & 0 & 4\\
0 & 0 & 3 & (1) & -2 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}$$

Wybieramy kolumnę poprawiającą x_2.
$Min\left\{\frac{4}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ i element centralny zaznaczamy nawiasem

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & 0 & 4 & -1\\
0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 2\\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & (1) & 4 & 1 & -3 & 1\\
0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 3\\
\hline
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & -3 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 2 & -5 & 3
\end{array}\right]$$

Koniec fazy pierwszej. Wszystkie sztuczne zmienne są niebazowe wykreślamy wiersze i kolumny związane ze sztucznymi zmiennymi.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 3\\
\hline
0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1\\
0 & (1) & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}\right]$$

Kolumna x_1 wyznacza krawędź poprawiającą. Idąc nią otrzymujemy.

$$\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 0 & 2 & 0 & 17 & 9\\
\hline
0 & 0 & 1 & 1 & 11 & 4\\
0 & 1 & 1 & 0 & 7 & 3
\end{array}\right]$$

Ta tablica opisuje jedyny wierzchołek optymalny $(3, 0, 4, 0)$,
w którym $x_{max} = 9$

Metoda dużego M:

Czasami potrafimy oszacować wartość x_0 i $max \quad x_i$. Szczególnie w zagadnieniach całkowitoliczbowych np. transport ciężarówkami i gdy wśród warunków są $0 \leq x_i \leq b_i$.

Aby rozwiązać zadanie: $Max \quad x_0 = cx$

$Ax = b$

$x \geq 0$

wybieramy liczbę M, o której wiemy, że jest większa od funkcji celu i rozpatrujemy zadanie $Max \quad \overline{x_0} = cx - My$

$Ax + Iy = b$

$x \geq 0 \qquad y \geq 0.$

Teraz poprawione zadanie opisane jest tablicą sympleks:

$$TS = \left[\begin{array}{c|c|c} -c-dM & 0...0 & -M\cdot\sum b_i \\ \hline A & I & b \end{array}\right],$$

gdzie wektor d jest sumą wierszy macierzy A.

Rozwiązanie zawsze istnieje, ale czasami w opisie kosztów zredukowanych wierzchołka optymalnego występuje M - oznacza to, że zadanie wyjściowe jest sprzeczne. W stosunku do poprzednich metod zyskujemy to, że mamy jedną fazę i jedną funkcję celu.

Przykład 11.2 $Max \quad x_0 = x_1 - 2x_2 - 3x_4$

$x_1 - x_2 - x_3 = 1$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$

$x_i \geq 0$

Sprowadzamy do zadania:

$Max \quad \overline{x_0} = x_1 - 2x_2 - 3x_4 - My_1 - My_2$

$x_1 - x_2 - x_3 + y_1 = 1$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + y_2 = 1$

$x_i \geq 0, \ y \geq 0$

Otrzymujemy następujące tablice sympleks:

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & y_1 & y_2 & ww \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 3 & M & M & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} 1 & -1 & 2 & -M & 3+M & 0 & 0 & -2M \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & (2) & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{r|rrrr|rr|r} 1 & -1-\frac{1}{2}M & 2+\frac{1}{2}M & 0 & 3+\frac{1}{2}M & 0 & \frac{1}{2}M & -\frac{3}{2}M \\ \hline 0 & (\frac{1}{2}) & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2+M & M+1 & 3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Rozwiązaniem jest wierzchołek $(3,0,2,0)$*, w którym funkcja celu osiąga wartość 3.*

12

Przykład 12.1 *Przykład zapętlenia się algorytmu sympleks.*

$Max\ x_0 = \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7$, *gdzie*

$$x_1 + \tfrac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$
$$x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \tfrac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$
$$x_3 + x_6 = 1$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$

Ten układ równań daje następującą TS

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{4}}) & -8 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Otrzymujemy następujące TS:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\frac{7}{2} & 33 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & -32 & -4 & 36 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{4}) & \frac{3}{2} & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 18 & 0 \\ \hline 0 & -12 & 8 & 0 & 1 & 0 & (\mathbf{8}) & -84 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 1 & -\frac{21}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{64} & 1 & 0 & (\mathbf{\frac{3}{16}}) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 & 1 & -\frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{21}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 16 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & (\mathbf{2}) & -6 & 0 & -\frac{5}{2} & 56 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{16}{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 1 & \frac{5}{2} & -56 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & -\frac{7}{4} & 44 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{5}{4} & 28 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{3}}) & 0 & \frac{1}{6} & -4 & -\frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

I tak ostatnia siódma TS jest identyczna z pierwszą.
Wszystkie tablice opisują wierzchołek nieoptymalny $p = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$
Idąc inną drogą otrzymujemy:

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 20 & -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -8 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (\mathbf{\frac{1}{2}}) & -12 & -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 2 & -\frac{5}{4} & \frac{21}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -2 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -24 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (\mathbf{1}) & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{4} & 0 & 2 & 0 & \frac{21}{2} & \frac{5}{4} \\ \hline 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 & -2 & 0 & \frac{15}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -24 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ostatnia tablica opisuje wierzchołek optymalny $q = (\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$.

Rada praktyczna:
Krawędzie zdegenerowane pochodzą od tych zmiennych, które na przecięciu swojej kolumny i równania (wiersza) o wyrazie wolnym 0 mają liczbę > 0.
Badamy wiersze o zerowym wyrazie wolnym i szukamy krawędzi poprawiających, które mają w tym wierszu liczbę ≤ 0.

13 Teoria dualności.

Definicja 13.1 *Rozważmy zadanie PL zwane pierwotnym P.*
$Max\, x_0 = c_1 x_1^T + c_2 x_2^T + c_3 x_3^T + b_0$,
gdzie $x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, x_3 \in R^{n_3}, x = (x_1, x_2, x_3) \in R^{n_1+n_2+n_3}$

$$\lceil A_{1,1} \mid A_{1,2} \mid A_{1,3} \rceil \quad x^T = b_1^T$$

$$|A_{2,1} \mid A_{2,2} \mid A_{2,3}| \quad x^T \leq b_2^T$$

$$\lfloor A_{3,1} \mid A_{3,2} \mid A_{3,3} \rfloor \quad x^T \geq b_2^T$$

$x_1 \in R^{n_1}$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \leq 0$.

wtedy zadaniem dualnym D nazywamy zadanie:
$Min\, y_0 = c_1 y_1^T + c_2 y_2^T + c_3 y_3^T + b_0,$
gdzie $y_1 \in R^{t_1}, y_2 \in R^{t_2}, y_3 \in R^{t_3}, y = (y_1, y_2, y_3) \in R^{t_1+t_2+t_3}$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1}^T & A_{2,1}^T & A_{3,1}^T \\ A_{1,2}^T & A_{2,2}^T & A_{3,2}^T \\ A_{1,3}^T & A_{2,3}^T & A_{3,3}^T \end{bmatrix} \begin{matrix} y^T = c_1^T \\ y^T \leq c_2^T \\ y^T \geq c_2^T \end{matrix}$$

$y_1 \in R^{t_1}$, $y_2 \geq 0$, $y_3 \leq 0$.

Reguły przechodzenia od zadania pierwotnego do dualnego przedstawia tabela:

Jeżeli P ma n zmiennych to D jest opisane przez n nierówności (równań). Jeżeli P jest opisane t nierównościami to D ma t zmiennych.

P	D
min	*max*
max	*min*
i-ta nierówność zgodna z typem	i-ta zmienna ≥ 0
j-ta nierówność niezgodna z typem	j-ta zmienna ≤ 0
k-ta nierówność jest równaniem	k-ta zmienna nieograniczona
i-ta zmienna ≥ 0	i-ta nierówność zgodna z typem
j-ta zmienna ≤ 0	j-ta nierówność niezgodna z typem
k-ta zmienna nieograniczona	k-ta nierówność jest równaniem

gdzie:

dla zadań typu Max
$a^T x \leq b$ - nierówność jest zgodna z typem
$a^T x \geq b$ - nierówność jest niezgodna z typem
dla zadań typu Min
$a^T x \geq b$ - nierówność jest zgodna z typem
$a^T x \leq b$ - nierówność jest niezgodna z typem

Przykładami par zadań wzajemnie dualnych są:

P: $max \quad cx^T$ D: $min \quad by^T$
$Ax^T \leq b^T$ $A^T y^T \geq c^T$
$x \geq 0$ $y \geq 0$

lub

P: $max \quad cx^T$ D: $min \quad by^T$
$Ax^T = b^T$ $A^T y^T \geq c^T$
$x \geq 0$ $y \in R^t$

Przykład 13.2 *Jeżeli zadanie pierwotne P ma postać:*

$Max \quad x_0 = 2x_1 + x_2 - x_3$

$x_1 + x_2 \geq -3$

$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2$

$-x_1 + 2x_3 = 7$

$x_2 + x_3 \leq 5$

$x_1 \geq 0, \quad x_3 \leq 0$

$$b^T = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad c = (2, 1, -1)$$

to zadanie dualne D ma postać:

$Min\, y_0 = -3y_1 + 2y_2 + 7y_3 + 5y_4$

$y_1 + y_2 - y_3 \geq 2 \quad \leftarrow$ *zgodna z typem gdyż* $x_1 \geq 0$

$y_1 + 3y_2 + y_4 = 1 \quad \leftarrow$ *gdyż* x_2 *nieograniczone*

$y_1 + 2y_3 + y_4 \leq -1 \quad \leftarrow$ *niezgodna z typem gdyż* $x_3 \leq 0$

$y_1 \leq 0 \quad \leftarrow$*gdyż* $x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 2$ *niezgodna z typem*

$y_2 \leq 0 \quad \leftarrow$ *gdyż* $-x_1 + 2x_3 = 7$ *niezgodna z typem*

$y_3 \in R$

$y_4 \geq 0 \quad \leftarrow$ *gdyż* $x_2 + x_3 \leq 5$ *zgodna z typem*

Twierdzenie 13.3 *Zadanie dualne do dualnego jest równoważne zdaniu pierwotnemu.*

Przykład 13.4 *Rozważmy zadanie pierwotne P:*

$Max \quad c^T x$

$Ax \leq b$

$x \geq 0$

$\downarrow$

$D \qquad Min \quad b^T y$

$A^T y \geq c$

$y \geq 0$

$\downarrow$

D' $\qquad -Max(-b\prime)^T y$

$(-A^T)y \leq -c$

$y \geq 0$

$\downarrow$

D(D') $\qquad -Min(-c^T z)$

$(-A^T)^T z \geq (-b^T)^T$

$z \geq 0$

$\downarrow$

P' $\quad Max \quad c^T z$

$\quad\quad Az \leq b$

$\quad\quad z \geq 0$

P'=P

Definicja 13.5 *Zadania P_1 i P_2 nazywamy równoważnymi jeżeli można od jednego do drugiego przejść stosując następujące reguły:*

1) Mnożenie nierówności (równania) przez liczbę $r \neq 0$.

1') Mnożenie zmiennej przez liczbę $r \neq 0$.

2) Zastąpienie nierówności $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$ parą

$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}.$

2a) Zastąpienie pary

$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i + x_{n+1} = b \\ x_{n+1} \geq 0 \end{cases}$

nierównością $\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b$.

3) Zastąpienie równania $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$ parą

$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^n -a_i x_i \leq -b \end{cases}.$

3a) Zastąpienie pary

$\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ \sum_{i=1}^n -a_i x_i \leq -b \end{cases}.$

równaniem $\sum_{i=1}^n a_i x_i = b$.

4) Zastąpienie zmiennej nieograniczonej x_i parą $x_i = x_i^+ - x_i^-$, gdzie

$\begin{cases} x_i^+ \geq 0 \\ x_i^- \geq 0 \end{cases}.$

5) Zastąpienie problemu $\{x_0 = cx^T \,|\, x \in D\}$ problemem

$\{x_0 c f(x)^T \,|\, f(x) \in f(D)\}$, gdzie f jest automorfizmem afinicznym.

Twierdzenie 13.6 *Jeżeli zadania P_1 i P_2 są równoważne to dualne do nich zadania D_1 i D_2 też są równoważne.*

Twierdzenie 13.7 (Słabe twierdzenie o dualności) *Jeżeli p jest punktem dopuszczalnym zadania pierwotnego P: Max $\{c^T x \,|\, Ax^T \leq b^T\}$ zaś q jest punktem dopuszczalnym zadania dualnego D: Min $\{b^T y \,|\, A^T y^T \leq c^T\}$ to*

$c^T p \leq b^T q$

Ponadto jeżeli $c^T p = b^T q$ to p jest punktem optymalnym P, zaś q jest punktem optymalnym D.

Dowód:

$Ap \leq b \qquad A^T q \geq c$

$p \geq 0 \qquad\quad q \geq 0$

$$c^T p = p^T c \qquad (A^T q - c) \geq \theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p^T(A^T q - c) \geq 0 \in R$$
$$p^T A^T q - p^T c \geq 0$$
$$p^T c \leq p^T A^T q = q^T A p$$
$$(b - Ap) \geq \theta$$
$$q^T(b - Ap) \geq 0$$
$$q^T b - q^T A p \geq 0$$
$$q^T b \geq q^T A p$$
$$q^T A p \leq q^T b$$

$$(A^T q - c) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_t \end{bmatrix}$$

$z_i \geq 0$ to i-ta nierówność zgodna z typem $\Rightarrow p_i \geq 0$
$z_i \leq 0$ to i-ta nierówność niezgodna z typem $\Rightarrow p_i \leq 0$
zawsze $p_i z_i \geq 0$ czyli nawet jeśli $(b - Ap) \neq \theta$ to i tak $q^T(b - Ap) \geq 0$
część druga
$c^T p = b^T q$ to $\forall_x$ z obszaru dopuszczalnego $c^T x \leq b^T q = c^T p \Rightarrow p$ optymalny i z drugiej strony identycznie $b^T y \geq c^T p = b^T q \Rightarrow q$ optymalny

□

Wniosek 13.8 *Jeżeli zadanie P jest nieograniczone to D jest sprzeczne.*

Dowód:

Przypuśćmy że D nie jest sprzeczne $\Rightarrow$ istnieje q w obszarze dopuszczalnym zadania D
$\forall_x$ dopuszczalnego $c^T x \leq b^T q \Rightarrow P$ ograniczone

□

Wniosek 13.9 *Jeżeli D jest nieograniczone to P sprzeczne.*

Niestety zadania P i D mogą być naraz sprzeczne:

Przykład 13.10 $P = max \quad x_1 + x_2$
$-x_1 + x_2 \leq -1$
$x_1 - x_2 \leq -1$
$x_1, x_2 \geq 0$
$\Downarrow$
$0 \leq -2$

$$\begin{array}{ll} D & min - y_1 - y_2 \\ & -y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 - y_2 \geq 1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \\ & \Downarrow \\ & 0 \geq 2 \end{array}$$

Lemat 13.11 (Lemat Farkas'a) *Spośród układów*
1) $Ax^T = b^T \wedge x \geq 0$
2) $yA \geq 0 \wedge by^T < 0$
dokładnie jeden ma rozwiązanie.

Dowód:

Przypuśćmy że 1) i 2) mają rozwiązania x_0 i y_0. Wtedy $x_0 \geq 0$ i $y_0A \geq \theta$ więc $y_0Ax_0^T \geq 0$. Ale $y_0Ax_0^T \geq 0 = y_0b^T < 0$. Sprzeczność.

Przypuśćmy że 1) nie ma rozwiązania. Stosujemy pierwszą fazę z dwufazowej metody sympleks.

Rozwiązujemy zadanie opisane tablicą $\left[\begin{array}{cc|c} 0\ldots0 & 1\ldots1 & 0 \\ \hline A & I & b^T \end{array}\right]$,

gdzie zapisane wierszami $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix}$ i $b^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_t \end{bmatrix}$.

Końcowa tablica ma postać $\left[\begin{array}{cc|c} d_1\ldots d_n & k_1\ldots k_t & b_0 \\ \hline A' & D & b'^T \end{array}\right]$, gdzie wiersz $(d_1 \ldots d_n) \geq 0$ i $b_0 < 0$. Ale wiersz ten jest kombinacją liniową wierszy macierzy A. Oznacza to, że istnieje ciąg $y = (y_1, y_2, \ldots, y_t)$ taki, że $(d_1 \ldots d_n) = \sum_{i=1}^{t} y_iw_i$ oraz $b_0 = \sum_{i=1}^{t} y_ib_i$. Otrzymaliśmy rozwiązanie 2) $yA \geq 0 \wedge by^T < 0$.

□

Twierdzenie 13.12 *Rozpatrujemy zadanie optymalizacji liniowej:*
Max $x_0 = c \bullet x$, *gdzie* $x \in W$ *i* W *jest opisane układem nierówności:*

$$\begin{cases} w_1 \bullet x \leq b_1 \\ w_2 \bullet x \leq b_2 \\ \quad\vdots \\ w_t \bullet x \leq b_t \end{cases}.$$

Niech $p \in W$ *będzie takim punktem, że* $w_i \bullet p = b_i$, *dla* $i = 1, 2, ..., j$ *oraz* $w_i \bullet x < b_i$, *dla* $i > j$. *Wówczas:*

p jest punktem optymalnym tego zadania wtedy i tylko wtedy gdy dla pewnych liczb rzeczywistych $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0, ..., r_j \geq 0$ *zachodzi* $c = \sum_{i=1}^{j} r_iw_i$.

Dowód:

Niech $B = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_j \end{bmatrix}$ będzie macierzą pochodzącą od pierwszych j nierówności.

Wówczas p nie jest punktem optymalnym wtedy i tylko wtedy gdy kiedy istnieje wektor α taki, że $p + \alpha \in W$ i $x_0(p+\alpha) > x_0(p)$. Ponieważ długość wektora α nie gra roli to to tylko j pierwszych nierówności opisujących W ma znaczenie. Przekształćmy warunki:

$$\begin{cases} w_1 \bullet (p+\alpha) \le b_1 = w_1 \bullet p \\ w_2 \bullet (p+\alpha) \le b_2 = w_2 \bullet p \\ \vdots \\ w_j \bullet (p+\alpha) \le b_j = w_j \bullet p \end{cases}$$

$c \bullet (p+\alpha) > c \bullet p$ do:

$B\alpha^T \le 0$ i $c\alpha^T > 0$.

Przyjmując oznaczenia $A = B^T$ i $y = -\alpha$ otrzymujemy:

$yA \ge 0 \wedge cy^T < 0$ czyli drugi układ z lematu Farkasa.

A zatem układ $Ax^T = c^T \wedge x \ge 0$ nie ma rozwiązań. Oznacza to, że nie istnieje ciąg liczb nieujemnych $r_1 \ge 0, r_2 \ge 0, ..., r_j \ge 0$ taki, że dla $x = (r_1, r_2, ..., r_j)$ $xB = c$ czyli $c \ne \sum_{i=1}^{j} r_i w_i$.

□

Twierdzenie 13.13 (Silne twierdzenie o dualności) *Jeżeli jedno z zadań P lub D ma rozwiązanie to drugie też ma rozwiązanie i wartość funkcji celu są równe.*

Dowód:

Przyjmijmy, że zadanie pierwotne P:

$\{Max \quad x_0 = cx^T \mid Ax^T \le b^T\}$ ma punkt optymalny p taki, że $w_i \bullet p = b_i$, dla $i = 1, 2, ..., j$ oraz $w_i \bullet x < b_i$, dla $i > j$, gdzie $A = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n_t$.

Wówczas na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje ciąg liczb nieujemnych $r_1 \ge 0, r_2 \ge 0, ..., r_j \ge 0$ taki, że $c = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i$.

Zadaniem dualnym jest D: $\{Min \quad y_0 = bx^T \mid A^T y^T = c^t,\ y \ge 0\}$. Niech $q = (r_1, r_2, ..., r_j, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^t$. Wówczas $q \ge 0$

i $qA = (r_1, r_2, ..., r_j, 0, 0, ..., 0) \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_t \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{j} r_i w_i = c$ więc $A^T y^T = c^t$ co oznacza, że q jest punktem dopuszczalnym zadania D.

Ale $y_0(q) = bq^T = \sum_{i=1}^{t} b_i r_i = \sum_{i=1}^{j} b_i r_i = \sum_{i=1}^{j} (w_i p^T) r_i =$
$= \sum_{i=1}^{j} (r_i w_i) p^T = cp^T = x_0(p)$.

Teraz ze słabego twierdzenia o dualności wynika optymalność punktu q.

$\square$

Twierdzenie 13.14 (Twierdzenie o równowadze (Kuhn, Tucker)) *Punkt dopuszczalny p zadania P ($Max \quad x_0 = cx^T \mid Ax^T \leq b^T, x \geq 0$) jest punktem optymalnym wtedy i tylko wtedy gdy istnieje punkt dopuszczalny q zadania D*
($Min\ y_0 = b^T y^T \mid A^T y^T \geq c^T, y \geq 0$) taki, że:
1) $q(Ap^T - b^T) = 0$
2) $(qA - c)p^T = 0$
$p(A^T q^T - c^T) = 0$

Przykład 13.15 *P:* $\quad Max \quad x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$$\begin{array}{lll} 2x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 5 & = & \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7 & = & \\ x_1 + 2x_3 \geq 6 & > & \Rightarrow y_3 = 0 \\ x_i \geq 0 & & \end{array}$$

Sprawdzamy czy $p = (0, 3, 4)$ jest optymalny?

Szukamy w tym celu punktu $q = (y_1, y_2, y_3)$ spełniającego oba warunki równowagi a potem sprawdzimy czy któryś ze znalezionych punktów jest dualnie dopuszczalny. Aby sprawdzić pierwszy warunek podstawiamy punkt p do nierówności. Ponieważ trzecia nierówność spełniona jest na ostro to trzecia współrzędna punktu q musi być zerowa.

$$Ap - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ > 0 \end{bmatrix}$$

Budujemy zadanie dualne.

$D: \quad Min \quad 5y_1 + 7y_2 + 6y_3$

$$\begin{array}{ll} 2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 1 & \textit{cokolwiek} \\ 3y_1 + 5y_2 \geq 5 & = \\ -y_1 - 2y_2 + 2y_3 \geq -2 & = \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \in R,\ y_3 \leq 0 & \end{array}$$

Aby punkt q spełniał drugi warunek równowagi to ponieważ punkt p ma drugą i trzecią współrzędną niezerową to punkt q musi spełniać drugą i trzecią nierówność zadania dualnego jak równość. Po opuszczeniu trzeciej, zerowej współrzędnej otrzymujemy:

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 = 5 \\ -y_1 - 2y_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Zatem $q = (0, 1, 0)$ lub nie istnieje.

Ponieważ $q = (0, 1, 0)$ jest dopuszczalny dla zadania dualnego, więc p jest optymalny.

Ponadto q jest optymalny dla D.

Dowód:
(twierdzenia o równowadze)

Niech p będzie optymalny, to na mocy poprzedniego twierdzenia istnieje rozwiązanie q optymalne dla zadania D.

$b^Tq = c^Tp$
$\underset{\geq 0}{q^T}(\underset{\geq 0}{Ap-b}) \leq 0$
$q^TAp - q^Tb \leq 0$
$q^TAp \leq q^Tb = b^Tq$

$(\underset{\geq 0}{q^TA - c^T})\underset{\geq 0}{p} \geq 0$
$q^TAp - c^Tp \geq 0$
$q^TAp \geq c^Tp$

$*c^Tp \leq q^TAp \leq b^Tq \leftarrow$ zachodzi zawsze, jeżeli p i q są optymalne, to skrajne kawałki są równe czyli wszędzie są równości,

w szczególności
$c^Tp = q^TAp \Leftrightarrow q^TAp - c^Tp = 0 \Leftrightarrow (q^TA - c^T)p = 0$
$b^Tq = q^Tb = q^TAp \Leftrightarrow q^Tb - q^TAp = 0 \Leftrightarrow q^T(b - Ap) = 0$

Przypuśćmy, że zachodzi 1) i 2)
wtedy z 1)otrzymujemy $q^TAp = b^Tq$
2) otrzymujemy $c^Tp = q^TAp$
$\Rightarrow b^Tq = c^Tp \Rightarrow p$ i q optymalne

Uwagi:
$c^Tp \leq q^TAp$
$(q^TA - c^T)p \geq 0$

P - max p - punkt dopuszczalny P
D - min q - punkt dopuszczalny D

D porównuje A^Tq z c. Jeżeli w P $x_i \geq 0$ to i-ta równość jest zgodna.

$A = [k_1, k_2, ..., k_n]$ $\quad k_i^Tq \geq c_i$

$$A^T = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ... \\ k_n \end{bmatrix} \quad (\underset{\geq 0}{k_i^Tq - c})\underset{\geq 0}{p_i} \geq 0$$

Jeżeli $x_j \leq 0$ to j-ta nierówność jest niezgodna z typem $k_j^Tq \leq c_j$
$(\underset{\leq 0}{k_j^Tq - c_j})\underset{\leq 0}{p_j} \geq 0$

Jeżeli $x_i = 0 \Leftrightarrow p_i = 0$
$(k_j^Tq - c_i)p_i = 0$
$\forall_i \quad (k_j^Tq - c_i)p_i \geq 0$
$\left(A^Tq - c^T\right)p \geq 0$

$\square$

Dualna metoda sympleks.

$P \quad Max \quad x_0 = c^T x$

$Ax = b$

$x \geq 0$

$$TS = \left[\begin{array}{c|c} -c_N & 0 \\ \hline A & b \end{array}\right]$$

TS jest pierwotnie dopuszczalna (przedstawia wierzchołek obszaru dopuszczalnego) $\Leftrightarrow b \geq 0$

TS jest dualnie dopuszczalna (przedstawia wierzchołek zadania dualnego) $\Leftrightarrow c \leq 0 \quad (-c_N \geq 0)$

TS przedstawia wierzchołek optymalny jest pierwotnie i dualnie dopuszczalna.

Przykład:

$P \quad Min \quad x_0 = 2x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \geq 2$

$3x_1 + 2x_2 \geq 7$

$2x_1 + x_2 \geq 4$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

(typowy przykład zagadnienia diety)

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ww
1	−2	−3	0	0	0	0
0	1	1	−1	0	0	2
0	3	2	0	−1	0	7
0	2	1	0	0	−1	4

$$TS \quad \begin{array}{ccccc|c} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

jest dualnie dopuszczalna.

Rozpatrzmy teraz zadanie dualne:

$D \quad Max \quad y_0 = 2y_1 + 7y_2 + 4y_3$

$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 2$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$

I równoważne mu:

$D^* \quad Min - y_0 = -2y_1 - 7y_2 - 4y_3$

$$TS^* \quad \begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Jeżeli wykreślimy kolumny związane ze zmiennymi bazowymi to $-TS^T = TS^*$

Prześledźmy metodę sympleks na tych dwóch tablicach równocześnie.

Dualne

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (1) & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ \hline 1 & (3) & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -4\frac{2}{3} \\ \hline \frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{5}{3} \end{array}$$

Pierwotne

$$\begin{array}{ccccc|c} -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline (-1) & -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & (-3) & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & -\frac{5}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 4\frac{2}{3} \\ \hline 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{array}$$

Otrzymaliśmy rozwiązania

$q = (0, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{5}{3})$ dla zadania dualnego i $p = (\frac{7}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3})$ dla zadania pierwotnego. Ale wartości funkcji celu są równe

$-y_0 = -4\frac{2}{3}$

$y_0 = 4\frac{2}{3} = x_0$

Algorytm dualnej metody sympleks (dla Max):

na starcie mamy TS dualnie dopuszczalną (tzn. $-c_N \geq 0$)

$TS = \begin{array}{c|c} -c_N & b_0 \\ \hline \mathbf{A} & b \end{array}$ gdzie elementy macierzy A oznaczamy:

$a_{i,j}, 1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq t$ zaś kolumny b oznaczamy $b_i, 1 \leq j \leq t$.

1° Test optymalności. Jeżeli $b \geq 0$ to stop (tablica przedstawia wierzchołek optymalny)

2° Wybieramy wiersz główny i, taki, że $b_i < 0$

3° Test sprzeczności: jeżeli w i-tym wierszu wszystkie wyrazy są ≥ 0 to stop (zadanie sprzeczne)

Ponieważ i-ty wiersz reprezentuje równanie

$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \quad x_j = b_i$

$a_{i,j} \geq 0 \quad x_j \geq 0$ oraz $b_i < 0$

4° Wybór elementu centralnego:

Liczymy minimum $Min\{\left|\frac{c_j}{a_{i,j}}\right| : 1 \leq j \leq t,\ a_{i,j} < 0\}$.

Jako element centralny wybieramy dowolne a_{ij} na którym osiągalne jest minimum.

5° Eliminacja Gaussa-Jordana

6° Wracamy do 1°

Rzeczywiście 5° daje TS dualnie dopuszczalną:

nad kreską otrzymujemy $W_0 - \frac{d_j}{\alpha_{ij}} W_i$ gdzie $W_0 = (d_1, d_2, ..., d_n)$ zatem w k-tej kolumnie otrzymujemy $d_k - \frac{d_j}{a_{ij}} \cdot a_{ik} \geq 0$

$d_k \geq 0 \qquad d_j \geq 0 \qquad a_{ij} \leq 0$

$\frac{d_j}{a_{ij}} \leq 0$
jeżeli $\alpha_{ik} \geq 0$ to $\frac{d_j}{a_{ij}} \cdot a_{ik} \geq 0$ i
nierówność zachodzi
jeżeli $a_{ik} < 0$ to $\left|\frac{d_j}{a_{ik}}\right| \geq \left|\frac{d_j}{a_{ij}}\right|$

$\frac{d_j}{a_{ik}} \geq \frac{d_j}{a_{ij}} \qquad d_k \geq \frac{d_j}{a_{ij}} a_{ik}$

Porównanie metody sympleks prostej i dualnej

1) zadanie opisane TS dualnie dopuszczalną może mieć rozwiązanie lub być sprzeczne, ale nie może być nieograniczone.

1') zadanie opisane TS pierwotnie dopuszczalną może mieć rozwiązanie lub być nieograniczone ale nie może być sprzeczne (TS opisuje wierzchołek dopuszczalny)

2) Dualna metoda sympleks daje rozwiązanie (algorytm się kończy) ponieważ ma tyle kroków ile prosta metoda sympleks na zadaniu dualnym.

3) Przy zadaniu Max

W dualnej metodzie sympleks wartość funkcji celu maleje, (w pierwotnej rośnie).

Dualna metoda sympleks jest używana tylko jako narzędzie pomocnicze, ponieważ niedokończone obliczenia nie dają przybliżonego rozwiązania, a tylko oszacowanie funkcji celu.

Relaksacje.

Relaksacja nazywamy zadanie powstałe z ZPL przez uproszczenie warunków czyli powiększenie obszaru dopuszczalnego.

d	0	b_0
N	I	b

Możemy dopisać równanie wyznaczające koszty.
α - koszt zawodnika
$\sum_{\alpha ixi} \leq b_{t+1} \quad x_i \in \{0,1\}$

$\sum_{\alpha ixi} + x_{n+1} = b_{t+1}$

d	0		b_0
N	I		b
$\alpha_1 ...$	$...\alpha_n$	1	b_{t+1}
	tu musimy wyzerować		

Po doprowadzeniu do TS otrzymujemy TS dualnie dopuszczalną.
Dopisywanie warunków (zacieśnianie relaksacji) prowadzi do TS dualnie dopuszczalnej, która rozwiązujemy dualną metodą sympleks.
warunki, jakich żądamy od dobrej relaksacji:

1 Relaksacje ma być łatwo wyliczalna
2 relaksacja ma dobrze przybliżać wyniki (1 i 2 są ze sobą sprzeczne)

3 Jeżeli relaksacja daje zadanie sprzeczne, to wyjściowe też ma być sprzeczne (obszar dopuszczalny relaksacji ma zawierać obszar dopuszczalny zadania wyjściowego).

Relaksacje stosujemy do zagadnień całkowitoliczbowych.

P $\quad Max \quad x_0 = c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$
$x_i \in Z$

Relaksacja RP $\quad Max \quad x_0 = c^T x$
$Ax = b$
$x \geq 0$
$x_i \in R$

RP umiemy rozwiązać i często jedno z rozwiązań jest całkowitoliczbowe.

Jeżeli nie, to:

Otrzymaliśmy TS pierwotnie i dualnie dopuszczalną

$$TS \begin{array}{cc|c} d & 0 & b_0 \\ \hline N & I & b \end{array}$$

$b_i \notin Z$

możemy zacieśnić relaksację stosując odcięcia (zmniejszamy obszar dopuszczalny)

Odcięcie Gomory'ego

$\sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j = b_i \qquad b_i \notin Z.$

ponieważ $\lfloor a+b \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$

i $\lfloor a \cdot x \rfloor \geq \lfloor a \rfloor x$ dla $x \geq 0$ $x \in Z$, więc

$\lfloor b_i \rfloor = \left\lfloor \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j = b_i \right\rfloor \geq \sum_{j=1}^n \lfloor \alpha_{i,j} x_j \rfloor \geq \sum_{j=1}^n \lfloor \alpha_{i,j} \rfloor x_j$

Odcięcie polega na dopisaniu nierówności

$\sum_{j=1}^n \lfloor \alpha_{i,j} \rfloor x_j \leq \lfloor b_i \rfloor$

Jeżeli zmienna bazowa x_k miała wartość b_i to $\alpha_{ik} = 1$

$\alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i,2} x_2 + ... + x_k + ... + \alpha_{i,n} x_n = b_i$

$\sum_{j=1}^n \lfloor \alpha_{i,j} \rfloor x_i + x_{n+1} = \lfloor b_i \rfloor$

dopisujemy różnicę tych równań

$\sum_{j=1}^n (\lfloor \alpha_{i,j} \rfloor - \alpha_{i,j}) x_j + x_{n+1} = \lfloor b_i \rfloor - b_i$

i rozwiązujemy dualną metodą sympleks.

Metoda Rozgałęzień i odcięć

"Branch and Bound" BB

Streszczenie:

-rozwiązujemy relaksację

- sprawdzamy, czy otrzymane rozwiązanie jest dopuszczalne

- jeśli nie, to wykonujemy odcięcie lub dzielimy problem na 2 lub więcej problemów.

Przykład 13.16 *Rozwiązujemy zadanie P.*

$$\begin{aligned} Max \quad & x_0 = x_1 - 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 0 \\ & 4x_1 - 2x_2 \leq 9 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_i \geq 0 \qquad x_i \in Z \end{aligned}$$

Jest to zadanie typu:

$P \quad Max \quad x_0 = c^T x$

$x \in Q$.

Budujemy pierwszą relaksację:

1) RP $\quad Max \quad x_0 = c^T x$

$x \in RQ; \quad RQ \supset Q$, *gdzie*

Q *- zbiór dyskretny*

RQ *- wielościan, bo opuszczamy warunek* $x_i \in Z$

2) Rozwiązujemy RP

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & ww \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (4) & -2 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] Min\left\{*, \tfrac{9}{4}, 3\right\} = \tfrac{9}{4}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{3}{4} \end{array}\right]$$

Otrzymaliśmy punkt optymalny $p_1 = (\frac{9}{4}, 0, \frac{9}{4}, 0, \frac{3}{4})$ *niedopuszczalny dla zadania P*

$x_0 = \frac{9}{4}$

3) Dokonujemy podziału

$x_3 = x_1 - x_2 \in Z$ *a wyszło* $\frac{3}{4}$

RQ dzielimy na 2 podzbiory, tak zwany "lewy" i "prawy" przez dodanie ograniczeń:

$x_3 \leq \left[\frac{9}{4}\right] = 2$ *lub* $\qquad x_3 \geq \left[\frac{9}{4}\right] + 1 = 3$

$Q \subset RQ_L \cup RQ_P$

$RQ_L \cap RQ_P = \emptyset$

$$\begin{aligned} RQ_L \quad & x_3 \leq 2 \equiv x_3 + x_6 = 2 \\ & \tfrac{1}{2}x_2 + x_3 + \tfrac{1}{4}x_4 = \tfrac{9}{4} \\ & \tfrac{9}{4} - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_4 + x_6 = 2 \\ & -\tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{4}x_4 + x_6 = -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & ww \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & (-\frac{1}{4}) & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right] \leftarrow Min\left\{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right\} = 1$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

RP_L ma rozwiązanie dopuszczalne $p_1 = (2,0,2,1,0,0)$ $x_0 = 2$. Zapamiętujemy to rozwiązanie w sukcesorze.

Teraz rozwiązujemy problem "prawy" RP_P.

Dodajemy ograniczenie $x_3 \geq \left\lfloor \frac{9}{4} \right\rfloor + 1 = 3$

$$\frac{1}{2}x_2 + x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{9}{4}$$
$$x_3 - x_6 = 3 \equiv -x_3 + x_6 = -3$$
$$\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 + x_6 = -3 + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right] \leftarrow \textit{sprzeczność.}$$

Zamiast problemu P $x_0 = c^T x$ $x \in Q$ rozwiązujemy ciąg podproblemów $RP_1, RP_2, ..., RP_n$ gdzie RPi $x_0 = c^T x$ $x \in RQ_i$

$Q \subset \cap_{i=1}^{n} RQ_i$ oraz obszary RQ_i są parami rozłączne.

Jeżeli P ma rozwiązanie optymalne $w \in Q$, to w jest punktem optymalnym jednego z podproblemów.

Niech f_i - rozwiązanie problemu RP_i

$$f_i = \begin{cases} +\infty \text{ jeżeli } RP_i \text{ nieograniczone} \\ x_0(w_i) \text{ jeżeli } RP_i \text{ ma rozwiązanie} \\ -\infty \text{ jeżeli } RP_i \text{ sprzeczne} \end{cases}$$

$f = max \quad f_i$

Jeżeli $w \in Q$ nie jest jedynym rozwiązaniem to kilka problemów może wygenerować rozwiązanie.

Kryteria zamykania:

problem RP_i zamykamy w przypadku:

1) Znalezienia rozwiązania:

a) Jeżeli rozwiązanie jest dopuszczalne ($w_i \in Q$) to zamykamy

b) Jeżeli rozwiązanie jest niedopuszczalne to dzielimy na problemy lub zacieśniamy relaksację.

2) Otrzymania sprzeczności

3) Znalezienia rozwiązania (może być niedopuszczalne), w którym funkcja celu jest równa lub mniejsza od znalezionego wcześniej rozwiązania dopuszczalnego.

Przykład:

$x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{9}{4}$

$x_1 \leq 2$ lub $x_1 \geq 3$

$x_1 \leq 2$ $\quad x_1 + x_6 = 2$

$\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_4 + x_6 = 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4}$

tabelka prawie jak RPL powyżej

RPL ma rozwiązania $(2, 0, 2, 1, 0, 0)$ $\quad x_0 = 2$

dopuszczalne $x_{0max} \geq 2$

$x_1 \geq 3$ $\quad x_1 - x_6 = 3$

$-\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4 + x_6 = -\frac{3}{4}$

tabelka prawie jak RPp powyżej, ale nie ma sprzeczności

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{9}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & -\frac{3}{4} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

RPp ma rozwiązanie $(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0, 0, 0) \notin Q$ $\quad x_0 = 0 \Rightarrow$

lem zamykamy.

Jeżeli problem RPL był rozwiązywany wcześniej to RPp można zamknąć; *wpp* nie, bo nie ma z czym porównać.

Metoda BB.

Dana jest lista kandydacka L zawierająca wszystkie niezamknięte problemy. (L może np. zawierać tylko jeden problem początkowy).

Lista L będzie się rozszerzać przy dokonywaniu podziału i skracać przy zamykaniu problemu. Celem jest osiągniecie $L = \emptyset$.

Dodatkowo mamy sukcesor zawierający element ze zbioru dopuszczalnego i wartość funkcji na tym elemencie. W chwili początkowej sukcesor jest pusty zwykle).

$\widehat{x} = \{(f, w)\}$ lub $\widehat{x} = \emptyset$

1) Test stopu:

Jeżeli $L = \emptyset$ to stop, jeśli $\widehat{x} = \emptyset$ to w jest punktem optymalnym, a f jest rozwiązaniem .

2) Wybór kandydata z listy:

Wybieramy i usuwamy z listy L podproblem P_k. Ustalamy jego relaksację RPk.

3) Rozwiązujemy RPk i testujemy
kryteria zamykania:
a) Jeżeli jest spełnione kryterium 1a) i nie jest spełnione 3) to zmieniamy sukcesor $w : w_k$, $f : f_k$ GO TO 1)
b) Jeżeli spełnione kryteria 2) lub 3) GO TO 1)
c) Spełnione 1b). Decydujemy, czy zacieśniamy relaksację czy dokonujemy podziału:
Jeżeli zacieśniamy relaksację to GO TO 3)
Jeżeli dokonujemy podziału to GO TO 2)

Metodą BB rozwiązujemy zadanie programowania liniowego z parametrem (pewne współczynniki nie są określone)

$$TS \begin{array}{c|c|c} -c_N & 0 & b_0 \\ N & I & b \end{array}$$

np. $Max \quad x_0 = \frac{a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n}{b_1x_1+b_2x_2+...+b_nx_n}$
$x \in Q$
Niech t=$\sum_{bixi}$ i rozwiązujemy zadanie

$$\circ \qquad TS \qquad \begin{array}{r|} -c_N \mid 0 \mid \\ N \mid I \mid \\ b_1x_1 + b_2x_2 + ... + b_4x_4 \end{array} \begin{array}{|c|} b_0 \\ b \\ t \end{array}$$

przekształcenia polegają na wyborze elementu centralnego $\underset{i,\alpha_{ij}>0}{Min} \left\{ \frac{t_i}{\alpha_{ij}}, \frac{t}{b_j} \right\} = min$
i dzielimy na dwa podproblemy
1) $\frac{t}{b_j} < min \rightarrow b_j$ - element centralny
2) $\frac{t}{b_j} \geq min \rightarrow$ element centralny - jakiś z kolumny j

$$\widehat{x} = \left\{ \left(\frac{f(w)}{t}, w \right) \right\}$$

Algorytmy szybsze w szczególnych przypadkach:
zadanie przepływa w sieciach:
Mamy dany graf o wierzchołkach i krawędziach skierowanych.

14 Zagadnienie transportowe

Mamy n punktów wysyłających towar i t punktów odbierających. Istnieje droga od każdego dostawcy do każdego odbiorcy i znany jest koszt transportu jednostki towaru.

Jak zorganizować transport, żeby koszt był minimalny?

Zapiszmy dane w postaci tabeli:

	O_1	O_2	$\cdots$	$\cdots$	O_t	podaż
D_1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{1,t}$	b_1
D_2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{2,t}$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$		$\vdots$	$\vdots$
D_n	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$\cdots$	$a_{n,t}$	b_n
popyt	c_1	c_2	$\cdots$	$\cdots$	c_t	

Wprowadźmy zmienne $x_{i,j}$ opisujące ilość towaru przewożonego od i - tego dostawcy do j - tego odbiorcy.

Niech a_{ij} oznacza koszt przewiezienia jednostki towaru.

Jako funkcję celu przyjmijmy: $min\ x_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} a_{i,j} x_{i,j}$

Zadanie transportowe nazywamy **zbilansowanym** gdy podaż = popyt, czyli $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{j=1}^{t} c_j$.

W przypadku zbilansowanym obszar dopuszczalny opisany jest następującym układem równań i nierówności:

$\sum_{j=1}^{t} x_{1,j} = b_1$, - pierwszy dostawca wysyła cały towar,
$\sum_{j=1}^{t} x_{2,j} = b_2$, - drugi dostawca wysyła cały towar,
$\vdots$
$\sum_{j=1}^{t} x_{1,j} = b_n$, - n-ty dostawca wysyła cały towar,

$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_1$, - pierwszy odbiorca dostaje cały towar,
$\sum_{i=n}^{t} x_{2,j} = c_2$, - drugi odbiorca dostaje cały towar,
$\vdots$
$\sum_{i=n}^{t} x_{1,j} = c_t$, - t-ty odbiorca dostaje cały towar,

Ponadto nie można przewozić ujemnej liczby towarów - a więc:

$$\forall_{1 \leq i \leq n} \forall_{1 \leq j \leq t} \ \ x_{i,j} \geq 0$$

.

Czasami towary są podzielne jak prąd czy woda, ale zwykle dodajemy warunki:

$\forall_{i,j}\ x_{i,j} \in Z$

Jeśli dodamy do siebie równania opisujące popyt otrzymamy
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{t} x_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} b_i$

Analogicznie jeśli dodamy do siebie równania opisujące podaż otrzymamy
$\sum_{j=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = \sum_{j=1}^{t} c_i$.

Zatem dla zadania niezbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest sprzeczny zaś dla zadania zbilansowanego układ równań opisujący obszar dopuszczalny jest zależny. Można pokazać, że rząd macierzy układu jest równy $n + t - 1$ a więc tyle musi być zmiennych bazowych.

Zakładamy, że zagadnienie jest zbilansowane.

Zadanie opisują dwie tablice mające tyle wierszy ilu jest dostawców i tyle kolumn ilu jest odbiorców plus wiersze i kolumny nagłówków.

W pierwszej zapisujemy koszty lub koszty zredukowane - czyli to co jest nad kreską w tablicy sympleks.

Druga tablica opisuje przewozy - dla zmiennej bazowej $x_{i,j}$ wstawiamy wstawiamy ilość towaru przewożonego od i - tego dostawcy do j - tego odbiorcy zaś dla zmiennych niebazowych krzyżyk x. Ta tablica opisuje to co jest w tablicy sympleks z prawej strony kreski i umiejscowienie zmiennych bazowych jak w zrewidowanej metodzie sympleks.

Szukanie wierzchołka startowego

a) Metoda wierzchołka północno - zachodniego

1) Jeżeli mamy tylko jednego dostawcę lub tylko jednego odbiorcę to wszystkie zmienne są bazowe w tablicę przewozów wpisujemy popyty lub podaże odpowiednio.

2) Wybieramy wierzchołek północno - zachodni czyli miejsce w lewym górnym rogu.

2a) Jeżeli $b_1 \geq c_1$ to w to miejsce tablicy wpisujemy c_1 zaś w pozostałe miejsca pierwszej kolumny krzyżyki. ($x_{1,1} = c_1$). Teraz zamiast b_1 wpisujemy $b_1 - c_1$ i usuwamy pierwszego odbiorcę.

2b) Jeżeli $b_1 < c_1$ to w to miejsce tablicy wpisujemy b_1 zaś w pozostałe miejsca pierwszego wiersza krzyżyki. ($x_{1,1} = b_1$). Teraz zamiast c_1 wpisujemy $c_1 - b_1$ i usuwamy pierwszego dostawcę.

GO TO 1.

Przykład 14.1 *Dane jest zagadnienie transportowe opisane tabelą:*

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	*1*	*3*	*7*	*9*	*15*
D_2	*5*	*7*	*5*	*10*	*5*
D_3	*6*	*2*	*4*	*8*	*10*
D_4	*6*	*0*	*2*	*10*	*5*
Popyty	*6*	*4*	*10*	*15*	

Szukamy wierzchołka startowego metodą wierzchołka północno - zachodniego.

Zaczynamy od wierzchołka północno - zachodniego następującej tabeli.

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1					$\cancel{15}$ *9*
D_2					*5*
D_3					*10*
D_4					*5*
Popyty		*4*	*10*	*15*	

Ponieważ $Min\{6, 15\} = 6$ *więc 6 wpisujemy w tę komórkę i wykreślamy pierwszego odbiorcę.*

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6				$\cancel{15}$ 9
D_2	X				5
D_3	X				10
D_4	X				5
Popyty	$\cancel{6}$	4	10	15	

$Min\{4, 9\} = 4$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4			$\cancel{15}$ $\cancel{9}$ 5
D_2	X	X			5
D_3	X	X			10
D_4	X	X			5
Popyty	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	10	15	

$Min\{10, 5\} = 5$

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	$\cancel{15}$ $\cancel{9}$ $\cancel{5}$
D_2	X	X			5
D_3	X	X			10
D_4	X	X			5
Popyty	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{10}$ 5	15	

W kolumnie O_3 *i wierszu* D_2 $Min\{5, 5\} = 5$ *ale możemy wykreślić tylko odbiorcę - dostawcy wpisujemy 0.*

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	$\cancel{15}$ $\cancel{9}$ $\cancel{5}$
D_2	X	X	5		$\cancel{5}$ 0
D_3	X	X	X		10
D_4	X	X	X		5
Popyty	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{10}$ $\cancel{5}$	15	

Mamy teraz jedną linię.

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4	**Podaże**
D_1	6	4	5	X	$\cancel{15}$ $\cancel{9}$ $\cancel{5}$
D_2	X	X	5	0	$\cancel{5}$ $\cancel{0}$
D_3	X	X	X	10	$\cancel{10}$
D_4	X	X	X	5	$\cancel{5}$
Popyty	$\cancel{6}$	$\cancel{4}$	$\cancel{10}$ $\cancel{5}$	$\cancel{15}$	

b) Metoda minimalnych kosztów.

Ta metoda różni się od poprzedniej tym, że zamiast wierzchołka północno - zachodniego wybieramy miejsce tabeli o minimalnym koszcie.

Metoda sympleks

0) dana jest tablica kosztów K i tablica przewozów P opisująca wierzchołek startowy.

1) Test optymalności.

1a) W tablicy kosztów zaznaczamy miejsca odpowiadające zmiennym bazowym.

1b) Za tablicą w prawym górnym rogu wpisujemy 0.

1c) Uzupełniamy miejsca pod tabelą i z prawej strony takimi liczbami by suma liczby w tablicy, dopisanej w wierszu i dopisanej w kolumnie dawała 0 w przypadku zaznaczonych komórek - zmiennych bazowych.

1c) Wyliczamy tablicę kosztów zredukowanych dodając do każdego wiersza liczbę dopisaną z prawej strony i dodając do każdej kolumny liczbę dopisaną poniżej.

2) Jeżeli nie ma liczb ujemnych w tablicy kosztów to STOP. Ostatni schemat przewozów jest optymalny.

Przykład 14.2 *W zadaniu z poprzedniego przykładu koszty opisane są tabelą:*

*Zaznaczamy komórki zmiennych bazowych * i dopisujemy 0 w pierwszym wierszu.*

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	*1**	*3**	*7**	*9*	*0*
D_2	*5*	*7*	*5**	*10**	
D_3	*6*	*2*	*4*	*8**	
D_4	*6*	*0*	*2*	*10**	

Wymusza to liczby -1,-3 i -7 w pierwszych kolumnach.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	*1**	*3**	*7**	*9*	*0*
D_2	*5*	*7*	*5**	*10**	
D_3	*6*	*2*	*4*	*8**	
D_4	*6*	*0*	*2*	*10**	
	-1	*-3*	*-7*		

Wymusza to 2 w drugim wierszu.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	*1**	*3**	*7**	*9*	*0*
D_2	*5*	*7*	*5**	*10**	*2*
D_3	*6*	*2*	*4*	*8**	
D_4	*6*	*0*	*2*	*10**	
	-1	*-3*	*-7*		

Wymusza to -12 w czwartej kolumnie.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	2
D_3	6	2	4	8*	
D_4	6	0	2	10*	
	-1	-3	-7	-12	

Wymusza to 4 i 2 w ostatnich wierszach.

Koszty	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	1*	3*	7*	9	0
D_2	5	7	5*	10*	2
D_3	6	2	4	8*	4
D_4	6	0	2	10*	2
	-1	-3	-7	-12	2

Obliczając koszty zredukowane otrzymujemy.

Koszty$_1$	O_1	O_2	O_3	O_4	
D_1	0	0	0	-3	
D_2	6	6	0	0	
D_3	9	3	1	0	
D_4	7	-1	-3	0	

3) Wędrowanie między wierzchołkami.

3a) Wybieramy drogę o ujemnym koszcie - w przykładzie drogę wyznaczoną zmienną $x_{4,2}$ i w tablicy przewozy do X dopisujemy $+\Delta$.

3b) Wpisując przy odpowiednich zmiennych bazowych $\pm\Delta$ budujemy cykl tak by popyt i podaż z uwzględnieniem Δ nie zmieniła się.

3c) Wybieramy maksymalną $\Delta = min\{x_{i,j} \,|\Delta$ występuje ze znakiem -$\}$

4) Podstawiamy wyliczoną wartość Δ i usuwamy z bazy jedną ze zmiennych na której ilość przewożonego towaru zmniejszyliśmy do 0.

Przykład 14.3

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	6	4	5	X
D_2	X	X	5	0
D_3	X	X	X	10
D_4	X	X+Δ	X	5

Budujemy cykl:

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	*6*	*4*$-\Delta$	*5*$+\Delta$	X
D_2	X	X	*5*$-\Delta$	*0*$+\Delta$
D_3	X	X	X	*10*
D_4	X	$X+\Delta$	X	*5*$-\Delta$

$\Delta = min\{4, 5, 5\} = 4$ *i nowym schematem przewozów jest:*

Przewozy	O_1	O_2	O_3	O_4
D_1	*6*	X	*9*	X
D_2	X	X	*1*	*4*
D_3	X	X	X	*10*
D_4	X	*4*	X	*1*

Transport niezbilansowany

W przypadku gdy podaż przewyższa popyt zadanie można doprowadzić do zbilansowanego wprowadzając sztucznego odbiorcę o popycie równoważącym różnicę i kosztach przewozów 0. Po wyliczeniu optymalnego przewozu mówimy, że towary wysłane do sztucznego odbiorcy zostają u dostawców.

W przypadku gdy popyt przewyższa podaż, analogicznie, zadanie można doprowadzić do zbilansowanego wprowadzając sztucznego dostawcę o podaży równoważącym różnicę i kosztach przewozów 0.