ćwiczenia 7.04.2020

Zadanie 1 *Niech* $H_1, H_2 \subset K^2$ *będą podprzestrzeniami afinicznymi wymiaru 1. Wykazać, że jeżeli* H_1 *i* H_2 *nie są równoległe to* $|H_1 \cap H_2| = 1$.

Zadanie 2 *Wykazać, że dwie skośne proste w* R^3 *rozpinają* R^3.

Zadanie 3 *Niech* $f : A \to B$ *będzie przekształceniem afinicznym i* $\dim A = \dim B < \infty$. *Wykaż, że* f *jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy* f *jest epimorfizmem.*

Zadanie 4 *Niech* l_1, l_2, l_3 *będą takimi prostymi w* R^3, *że* $l_1 \| l_2$ *zaś* l_2 *i* l_3 *są skośne.*

a) Wykazać, że istnieje przekształcenie afiniczne $f : R^3 \to R^3$ *spełniające warunki:* $f(l_2) = l_1$ *i* $f(l_3) = l_2$.

b) Wykazać, że f *nie jest monomorfizmem.*

Zadanie 5 *Niech* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem*

$f([x, y, z]) = [3x+y+1, 2y+3z+2, x+y+z-3]$. *Opisać układem równań przestrzeń*

$f^{-1}(af\{[1, 1, 0], [0, 1, 1], [0, 1, 0]\})$.

Zadanie 6 *Niech* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie rzutem na płaszczyznę*

$\Pi : 2x + y - z = 5$ *wzdłuż* $\mathrm{lin}\{(1, 2, 1)\}$. *Znaleźć obraz prostej*

$l : \frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-3}$.

Zadanie 7 *Niech* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem:*

$f([x, y, z]) = [2x + y + 1, 2y + z + 2, 3]$. *Znaleźć bazy punktowe przestrzeni*

$V_1 = f(E)$ *i* $V_2 = f^{-1}(E)$, *gdzie* $E : 3x - 5y + z = 2$.

Zadanie 8

Twierdzenie Menelausa. Niech A,B,C będą punktami przestrzeni K^n *w położeniu ogólnym. Określamy:* $A_1 = k_1B + (1 - k_1)C$, $B_1 = k_2C + (1 - k_2)A$ *i* $C_1 = k_3A + (1 - k_3)B$, *dla pewnych* $k_1, k_2, k_3 \in K$. *Udowodnić, że punkty* A_1, B_1, C_1 *są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy*
$k_1k_2k_3 = (k_1 - 1)(k_2 - 1)(k_3 - 1)$.

Zadanie 9 *Niech A,B,C będą trzema punktami przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^n$. *Budujemy 3 środkowe:* $l_A = \mathrm{af}\{A,\ \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\}$, $l_B = \mathrm{af}\{B,\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\}$

i $l_C = af\{C,\ \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A\}$.

a) Udowodnij, że zbiór $l_A \cap l_B \cap l_C$ *jest niepusty.*

b) Wykaż, że jeżeli zbiór $l_A \cap l_B$ *ma co najmniej dwa punkty to* $\dim \mathrm{af}\{A,\ B,\ C\} < 2$.