ćwiczenia 2.06.2020

Zadanie 1. *Niech* $F_t(x_1, x_2, x_3) =$
$= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 2x_2 + 4tx_3 - 2t + 4$
i $H_t = \{x \in R^3 \mid F_t(x) = 0\}$.

a) Opisz zbiór środków symetrii H_t *w zależności od parametru* t.

b) Zbadaj dla jakich wartości parametru t *hiperpowierzchnia* H_t *jest prostokreślna.*

Zadanie 2. *Niech* $F_t(x, y, z) = 4xy - x - 2y - t\,xz + 2t\,yz + t + 1$
i $H_t = \{(x, y, z) \in R^3 \mid F_t(x, y, z) = 0\}$.

a) Określ typ afiniczny hiperpowierzchni H_t *w zależności od parametru* t.

b) Sprawdź dla jakich liczb rzeczywistych t*, hiperpowierzchnia* H_t *ma środek symetrii i czy należy on do hiperpowierzchni* H_t.

c) Sprawdź dla jakich liczb rzeczywistych t*, hiperpowierzchnia* H_t *jest prostokreślna.*

Zadanie 3. *Niech* $F(x_1, x_2, x_3) = -8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 5 + 4x_3$
i $H_1 = \{x \in R^3 \mid F(x) = 0\}$.

a) Opisz zbiór środków symetrii H_1.

b) Znajdź, o ile to możliwe, izomorfizm afiniczny przekształcający zbiór H_1 *na* H_2*, gdzie* $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

Rozwiązanie:

$-8x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5 = |x_1 = (y + z), x_3 = (y - z)|$
$= -8x_2(y + z) - 2(y + z)(y - z) + 4x_2(y - z) + 2(y + z) + 4x_2 + 4(y - z) - 5$
$= -4x_2y - 12x_2z - 2y^2 + 2z^2 + 6y - 2z + 4x_2 - 5$
$= -2\left(y + x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(z - 3x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - (1 + 4x_2)^2 =$
$|y = \frac{1}{2}(x_1 + x_3), z = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)|$
$= -2\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_2 - \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}(x_1 - x_3) - 3x_2 - \frac{1}{2}\right)^2 - (1 + 4x_2)^2$

a) Rozwiązujemy układ $\begin{cases} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_2 - \frac{3}{2} = 0 \\ \frac{1}{2}(x_1 - x_3) - 3x_2 - \frac{1}{2} = 0 \\ 1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$

Stąd $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = 2$.

b) Zauważmy, że $H_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid -2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 = 0\}$.
Takim izomorfizmem jest
$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2}(x_1 + x_3) + x_2 - \frac{3}{2},\ \frac{1}{2}(x_1 - x_3) - 3x_2 - \frac{1}{2},\ x_2 + \frac{1}{4}\right)$.

□