

ćwiczenia 29.05.2020

Zadanie 1 Niech $B = \{(0,0)\} \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. Wykaż, że B jest podzbiorem algebraicznym przestrzeni afinicznej \mathbb{R}^4 i \mathbb{C}^2 ale $B \neq \{(x,y) \mid w(x,y) = 0\}$ dla żadnego wielomianu $w(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$.

Zadanie 2 Niech $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$, zaś $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie przekształceniem afinicznym określonym wzorem: $f(x,y) = (x+3, 2x-y+1)$. Znajdź równanie opisujące hiperpowierzchnie:

- a) $f(P)$.
- b) $f^{-1}(P)$.

Zadanie 3 Niech $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$. Znajdź równanie opisujące H w układzie bazowym $\mathcal{U} = (p = (1,2); \alpha_1 = (2,3), \alpha_2 = (3,4))$.

Zadanie 4 Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 - x_2^2 + x_3 = 0\}$ i $p = (a, b, c) \in H$.

Opisz wszystkie proste zawarte w H i przechodzące przez punkt p .

Zadanie 5 Niech $F_t(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + tx_3 + 2$ i $H_t = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid F_t(p) = 0\}$.

- a) Zbadaj dla jakich wartości parametru t , hiperpowierzchnia H_t jest hiperboloidą dwupowłokową.
- b) Opisz zbiór środków symetrii H_t w zależności od parametru t .
- c) Udowodnij, że hiperpowierzchnia H_2 jest prostokreślna.

Zadanie 6 Niech $w(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2$. Znajdź taki izomorfizm liniowy $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ by $w \circ f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2$.