

## ćwiczenia 28.04

**Zadanie 1** Niech  $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$  będzie macierzą funkcjonatu dwuliniowego  $f$  w bazie standardowej.

- Sprawdź czy  $f$  jest iloczynem skalarnym,
- Znajdź bazę w której macierz  $f$  jest macierzą jednostkową.
- Niech  $V = \{x - 3y - z = 0\}$ . Opisz  $V^\perp$  w iloczynie skalarnym  $f$ .

**Zadanie 2** Niech  $V = \text{lin}\{(1, 2, 3), (0, 1, 1)\}$ . Znajdź taki iloczyn skalarny by  $V^\perp = \text{lin}\{(1, 1, 1)\}$ .

**Zadanie 3** Niech  $\alpha \neq \theta$  i  $\beta$  będą wektorami przestrzeni euklidesowej  $V$ . Udowodnij równoważność następujących warunków:

- $\beta = r\alpha$  dla pewnego  $r \geq 0$ .
- $\|\alpha + \beta\| = \|\alpha\| + \|\beta\|$ .
- $\langle \alpha; \beta \rangle = \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ .

### Zadanie 4

a) Niech  $A$  będzie macierzą iloczynu skalarnego. Udowodnij, że  $\forall_n A^n$  jest macierzą iloczynu skalarnego.

b) Podaj przykład takiej macierzy symetrycznej  $M$ , że  $M$  nie jest macierzą iloczynu skalarnego zaś  $M^2$  jest macierzą iloczynu skalarnego.

### Zadanie 5

Niech  $A$  będzie macierzą symetryczną. Udowodnij, że  $A$  jest macierzą iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy, gdy  $A^{2k+1}$  jest macierzą iloczynu skalarnego.

b) Podaj przykład takiej macierzy  $M \in \mathbb{R}_2^2$ , że  $M$  nie jest macierzą iloczynu skalarnego zaś  $M^3$  jest macierzą iloczynu skalarnego.