ćwiczenia 27.03.2020

Zadanie 1 *Niech* $z \in \mathbb{C}$ *będzie liczbą zespoloną. Udowodnij, że macierz* $\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{bmatrix}$ *jest podobna nad* $\mathbb{C}$ *do macierzy o współczynnikach rzeczywistych.*

Zadanie 2 *Niech* $M \in \mathbb{R}_n^n$ *będzie macierzą odwracalną. Udowodnij, że* $\forall_i \ M \sim M^i$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $w_M(x) = (1-x)^n$.

Zadanie 3 *Niech* $K = Z_p$ $(char(K) > 0)$ *i* $M \in K_n^n$ *będzie macierzą odwracalną. Udowodnij, że* $\forall_i \ M \sim M^i$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $M = I$.

Zadanie 4 *Niech* $A \in \mathbb{C}_n^n$ *spełnia warunek* $j > 0 \Rightarrow tr\, A^j = 0$.
Wykaż, że $\det A = 0$.

Zadanie 5 *Niech* $A \in \mathbb{C}_n^n$. *Udowodnij, że* A *jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy* $j > 0 \Rightarrow tr\, A^j = 0$.

Zadanie 6 *Niech* $f \in End(K^5)$ *spełnia warunki:*

a) $f^2 = 0 \cdot id$

b) $\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f) = 2$.

Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) postacie Jordana macierzy f.

Zadanie 7 *Niech* $f \in End(K^5)$ *spełnia warunki:*

a) $f^2 \neq 0 \cdot id = f^9$

b) $\dim(\ker f \cap \operatorname{im} f) = 2$.

Opisz wszystkie (z dokładnością do permutacji klatek) postacie Jordana macierzy f.

Zadanie 8 *Zbadaj, czy następujące wynikania są prawdziwe:*

a) Niech $f \in End(\mathbb{C}^n)$. *Jeżeli istnieje* $j > 1$ *takie, że* f^n *jest diagonalizowalny to* f *jest diagonalizowalny.*

b) Niech $f \in Aut(\mathbb{C}^n)$. *Jeżeli istnieje* $j > 1$ *takie, że* f^n *jest diagonalizowalny to* f *jest diagonalizowalny.*

c) Niech $f \in Aut(\mathbb{R}^n)$. *Jeżeli istnieje* $j > 1$ *takie, że* f^n *jest diagonalizowalny to* f *jest diagonalizowalny.*