ćwiczenia 24.04.2020

Zadanie 1 *Niech A,B będą podprzestrzeniami przestrzeni dwuliniowej V. Wykazać, że:*

1) $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

2) $A^{\perp} + B^{\perp} \subset (A \cap B)^{\perp}$.

3) Jeżeli V nieosobliwa (euklidesowa) to $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$.

4) Niech $G(\varphi; st) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3_3$.

Wskaż takie dwie podprzestrzenie $A, B \subset \mathbb{R}^3$ by $A^{\perp} + B^{\perp} \neq (A \cap B)^{\perp}$.

Zadanie 2 *Niech $\{K^n; \xi\}$ będzie przestrzenią dwuliniopwą zaś W będzie podprzestrzenią K^n. Niech $\varphi : K^n \to K^n$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)^{st}_{st} = G(\xi; st)$. Wykaż, że:*

a) $\ker \varphi = \big(K^n\big)^{\perp}$.

b) $\dim W^{\perp} + \dim \varphi(W) = n$.

c) $\dim W = \dim \varphi(W) + \dim \big(W \cap (K^n)^{\perp}\big)$.

d) Jeżeli $K = \mathbb{R}$ to $W^{\perp} \oplus \varphi(W) = \mathbb{R}^n$.

Zadanie 3 *Niech $\{V; h\}$ będzie skończenie wymiarową przestrzenią dwuliniową nad ciałem K, charakterystyki $\neq 2$. Niech $A = G(h, \mathcal{A})$ będzie macierzą Grama w pewnej bazie. Udowodnij równoważność następujących warunków:*

a) Zbiór wektorów izotropowych jest podprzestrzenią V.

b) Zbiór wektorów izotropowych jest równy $V^{\perp}$.

c) Dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ zachodzi $V = W + W^{\perp}$.

d) Dla każdego wektora $\alpha \in V$ zachodzi $V = \mathrm{lin}\{\alpha\} + \alpha^{\perp}$.