ćwiczenia 20.03.2020

Zadanie 1 *Niech $\phi : R^3 \longrightarrow R^3$ będzie przekształceniem mającym w bazie standardowej macierz*

$$a)A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b)\, B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad c)\, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Znajdź bazę przestrzeni złożoną z wektorów własnych ϕ i zapisz macierz przekształcenia ϕ w znalezionej bazie.

Zadanie 2 *Niech $\phi : R^3 \longrightarrow R^3$ będzie przekształceniem mającym w bazie standardowej macierz* $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ -12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Znajdź taką bazę R^3, w której ϕ ma macierz diagonalną.

b) Zbadaj, czy istnieje taka baza w której ϕ ma macierz $\begin{bmatrix} 10 & 18 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3

Wykaż, że macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 9 \\ 12 & -7 & -18 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ *jest diagonalizowalna.*

b) Znajdź taką macierz B by $B^3 = A$.

Zadanie 4 *Policz* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{45}$ *i* $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}^{10}$.

Zadanie 5 *Znajdź wzór na n-ty wyraz ciągu opisanego wzorem:*
$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$

Zadanie 6 *Niech $f \in End(V)$. Wykazać, że podprzestrzeń $W \subset V$ jest niezmiennicza wtedy i tylko wtedy, gdy W jest $K[x]$ podmodułem V.*

Zadanie 7 *Niech $\theta \neq \alpha \in V$. Wówczas* $\mathrm{lin}\{\alpha\}$ *jest niezmiennicza względem f wtedy i tylko wtedy, gdy α jest wektorem własnym.*

Zadanie 8 *Niech $f \in End(V)$. Niech $w_f(x)$ i $m_f(x)$ będą wielomianem charakterystycznym i wielomianem minimalnym tego endomorfizmu. Wykazać, że jeżeli jakiś wielomian nierozkładalny dzieli $w_f(x)$ to dzieli również $m_f(x)$.*