ćwiczenia 17.03.2020

Zadanie 1 *Niech G będzie grupą abelową zaś* $H = \{g \in G \ : \exists_n \ n \cdot g = 0\}$.

a) Wykazać, że H jest grupą.

b) Wykazać, że dla każdego automorfizmu $f : G \to G$ zachodzi $f(H) = H$.

Zadanie 2 *Niech p będzie liczbą pierwszą, G będzie grupą abelową zaś* $H_p = \{g \in G \ : \exists_n \ p^n \cdot g = 0\}$.

a) Wykazać, że H_p jest grupą.

b) Wykazać, że dla każdego automorfizmu $f : G \to G$ zachodzi $f(H_p) = H_p$.

Zadanie 3 *Wykazać, że* $H = \bigoplus_{p \in P} H_p$.

Zadanie 4 *Niech $n > 0$ będzie liczbą naturalną, G będzie grupą abelową zaś* $H^n = \{n \cdot g \ : g \in G\}$.

a) Wykazać, że H^n jest grupą.

b) Wykazać, że dla każdego automorfizmu $f : G \to G$ zachodzi $f(H^n) = H^n$.

Zadanie 5 *Niech* $G = Z_2 \oplus Z_2 \oplus Z_8 \oplus Z_9 \oplus Z_9 \oplus Z_5 \oplus Z_{125} \oplus Z_7$. *Przedstawić grupy H^2, G/H^2, H^{25}, G/H^{25}.*

Zadanie 6 *Niech a_n będzie ciągiem rekurencyjnym określonym wzorem:* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 5a_n - 6a_{n-1}$.

Znajdź wzór na a_n.

Zadanie 7 *Niech G będzie elementarną 2 grupą rzędu 2^n. Wykaż, że iloczyn wszystkich elementów G jest elementem neutralnym wtedy i tylko wtedy, gdy $n \neq 1$.*

Zadanie 8 *Niech G będzie grupą skończoną. Wykaż, że iloczyn wszystkich elementów G, w dowolnej kolejności, jest elementem neutralnym wtedy i tylko wtedy, gdy G jest grupą abelową i liczba jej elementów rzędu 2 nie jest równa 1.*