ćwiczenia 5.06.2020

Zadanie 1. *Znaleźć bazę* $(\mathbb{R}^3)^*$ *sprzężoną do* $(1,2,2),(2,5,5),(1,3,4)$.

Zadanie 2. *Niech* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *i* $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ *będą bazami przestrzeni liniowej* V. *Udowodnij, że:* $\alpha_1^* = k\beta_1^*$, *dla pewnego niezerowego skalara k, wtedy i tylko wtedy, gdy* $\operatorname{lin}\{\alpha_2,\alpha_3\} = \operatorname{lin}\{\beta_2,\beta_3\}$.

Zadanie 3. *Niech* $\alpha_1 = (-1,1,0),\ \alpha_2 = (0,-1,1) \in \mathbb{R}^3$ *zaś* $f_1 = x_2 + x_3$ *i* $f_2 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3$.

Uzupełnić ciąg $\alpha_1,\ \alpha_2$ *do bazy* $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$ *i znaleźć* $f_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ *tak, by* $\forall_{1\le i\le 3}\ \alpha_i^* = f_i$.

Zadanie 4. *Niech* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *i* $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$ *będą bazami przestrzeni liniowych* V *i* W *odpowiednio. Niech* $\varphi \in L(V;W)$ *będzie określone wzorem:* $\varphi(\alpha_i) = \beta_i$. *Opisz jądro przekształcenia* $\varphi^* \in L(W^*;V^*)$.

Zadanie 5. *Niech* $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ *i* $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\beta_5)$ *będą bazami przestrzeni liniowych* V *i* W *odpowiednio. Niech* $\varphi \in L(W;V)$ *będzie określone wzorem:* $\varphi(\beta_i) = \begin{cases} \alpha_i & , i \le 3 \\ \theta & , i \ge 4 \end{cases}$. *Opisz jądro i obraz przekształcenia* $\varphi^* \in L(V^*;W^*)$.

Zadanie 6. *Niech* $\varphi \in L(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^3)$ *będzie opisane macierzą* $M(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Znajdź bazy przestrzeni ker φ^* *i* $\operatorname{im}\varphi^*$.